Endomorphismes orthogonaux d'un espace préhilbertien réel.

I Généralités.

Définition.

Définition 1

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, $f \in \mathscr{L}(E)$.

L'endomorphisme f est dit *orthogonal* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle.$$

Remarques.

1. Les endomorphismes orthogonaux sont donc les endomorphismes qui conservent le produit scalaire.
2. Les projecteurs orthogonaux ne sont en générale pas des endomorphismes orthogonaux alors que le symétries orthogonales le sont.
3. Nous noterons $\mathscr{O}(E)$ (ou $(\mathscr{O}(E),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ en cas d'ambiguïté) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Caractérisation des endomorphismes orthogonaux.

Proposition 1

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $f \in \mathscr{O}(E)$.

(ii) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Démonstration 1

* $(i) \Rightarrow (ii)$. Découle de la définition.
* $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$. Démontrons que $f \in \mathscr{O}(E)$.
  En utilisant une identité de polarisation :

$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

D'après notre hypothèse :

$$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

En utilisant une identité de polarisation :

$$\langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

Remarques.

1. Cette conservation de la norme euclidienne explique que les éléments de $\mathscr{O}(E)$ soient aussi appelés des *isométries vectorielles*.

$\mathscr{O}(E)$, l'ensemble des isométries vectorielles.

Proposition 2

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

$(\mathscr{O}(E),+,.)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Remarques.

1. $(\mathscr{O}(E),\circ)$ n'est pas un groupe mais un magma unitaire. En effet les éléments de $\mathscr{O}(E)$ ne sont en général pas inversibles. Si E est de dimension infinie, une isométrie est toujours injective (son noyau est réduit à $\{0\}$), mais n'est pas nécessairement surjective (voir exemple ci-dessous). Donc, dans le cas de la dimension infinie $\mathscr{O}(E)$ n'est pas nécessairement un groupe.
2. L'expression groupe orthogonal, qui est valable en dimension finie, ne l'est donc pas en dimension infinie.

Exemples.

1. Donnons un exemple d'isométrie qui n'est pas surjective.
   Considérons $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ (espace préhilbertien de dimension infinie dénombrable).

On se donne une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt par exemple) et on définit l'endomorphisme u par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(e_n) = e_{n+1}$.
Alors pour $x = \sum_{k=0}^{n_x} x_k e_k \in E$, on a $u(x) = \sum_{k=0}^{n_x} x_k e_{k+1}$. Donc : $\|u(x)\| = \sum_{k=10}^{n_x} x_k^2 = \|x\|$. Autrement dit u est bien une isométrie.
Or $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\{e_k | k \in \mathbb{N}^*\} \neq E$ donc u n'est pas surjective.

À piller en urgence : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/AgregInterne/Oral1/114.pdf