Applications linéaires continues.

I Caractérisation de la continuité pour une application linéaire.

Théorème 1

Soient
. $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels,
. $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux.

(i) f est continue sur E,
(ii) f est continue en 0,
(iii) f est uniformément continue,
(iv) f est lipschitzienne,
(v) $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$,
(vi) f est bornée sur la boule unité fermée de E,
(vii) f est bornée sur la sphère unité.

Démonstration 1

* Démontrons : $(i) \Rightarrow (v)$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$.
Puisque f est continue en 0 :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+,\ \forall y \in E,\ \|y\|_E < \eta \Rightarrow \|f(y)\|_F < 1 \quad (1).$$

Comme $\left\|\frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{\|x\|_E}\cdot x\right\|_E < \eta$, nous déduisons de (1) :

$$\left\|f\left(\frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{\|x\|_E}\cdot x\right)\right\|_F < 1.$$

D'où par linéarité :

$$\|f(x)\|_F < \frac{2}{\eta}\cdot\|x\|_E.$$

Il suffit donc de choisir : $M = \frac{2}{\eta}$.

* Démontrons : $(v) \Rightarrow (i)$.

Soient $x(,y) \in E^2$.

$$\|f(x-y)\|_F \leqslant M\|x-y\|_E \Leftrightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \|x\|_E$$

Autrement dit f est M-lipschitzienne, donc f est continue.

Remarques.

1. Les autres démonstrations se font de même.
2. Nous verrons plus loin que si E est de dimension finie alors f est continue.
3. Nous noterons $\mathscr{L}^c_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'ensemble des application linéaires continues de E dans F. Pour bien faire la notation devrait aussi inclure les normes considérées sur les espaces E et F. Par exemple $\mathscr{L}^c_{\mathbb{K}}((E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F))$.

Exemples.

1. Exemple d'application continue avec E de dimension finie.
2. Exemple d'application continue avec de E de dimension infinie.
3. Exemple d'application linéaire non continue (donc E de dimension infinie.)

II Norme subordonnée, norme d'opérateur.

Définition.

Définition 1

Soient

. $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}^c_{\mathbb{K}}(E,F)$.

Si $E \neq \{0\}$ alors nous appellerons *norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$* de f, et nous noterons $\|f\|$, le nombre réel

$$\|f\| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Si $E = \{0\}$ alors $f = 0$ et nous noterons $\|f\| = 0$.

Remarques.

1. Cette borne supérieure existe bien d'après le théorème de caractérisation de la continuité des applications linéaires.

Proposition 1

Muni de la norme subordonnée $(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}^{c}(E,F),\|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Démonstration 2

Démontrons que $\|\cdot\|$ est une norme.

(i) Séparation.
$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

(ii) Absolue homogénéité.
$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |x|N(x).$

(iii) Sous-additivité (ou inégalité triangulaire).
$\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$

III Ensemble des applications linéaires continues.

$\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 2

Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels.

$(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}^{c}(E,F),+\,,\cdot\,,\circ)$ est une sous $\mathbb{K}$-algèbre de $(\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F),+\,,\cdot\,,\circ)$.

Démonstration 3

$\mathbb{K}$-algèbre normée.