Applications multilinéaires.

Dans cette leçon les résultats ne sont pas forcément transposable à un corps de scalaire dont la caractéristique est deux.

I Généralités

Définition.

Définition 1

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. $E_1, \ldots, E_k$ et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f : E_1 \times \ldots E_k \to F$ une application.

f est dites *k-linéaire* (ou *multilinéaire*) si elle est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à chacune de ses k variables.

Remarques.

1. Autrement dit f est k linéaire si et seulement si $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_n$, $\forall y_i \in E_i$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ \lambda f(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_k).$$

2. Cette définition est généralisable à d'autre corps des scalaires, notamment $\mathbb{C}$.
3. Pour $k \geqslant 2$, f n'est pas une application linéaire sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_k$.
4. Nous noterons $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_k$ dans F.
5. Dans le cas particulier $F = \mathbb{R}$ nous dirons de l'application que c'est une *forme n-linéaire*.
6. Dans le cas $E_1 = \cdots = E_k = E$ nous noterons $\mathscr{L}_k(E; F)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $E_1 \times E_k$ dans F. Et de même nous noterons $\mathscr{L}_k(E)$ l'ensemble des formes k-linéaires de E (dans $\mathbb{R}$).
7. Quand est-il d'application sur des espaces vectoriels dont les corps des scalaires sont tous distincts. Cela ne pose pas de problème si tous ces corps sont des sous-corps d'un même corps. Peut-être-il toujours possible de plonger ces corps dans un sur-corps commun.

Exemples.

1. L'application nulle est k-linéaire.
2. Les applications linéaires sont des applications multilinéaires pour $k = 1$.
3. Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une forme 2-linéaire mais nous parlerons plutôt de forme bilinéaire.

Structure de $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_1; F)$.

Proposition 1

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. $E_1, \dots, E_k$ et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

$(\mathscr{L}_k(E_1, \dots, E_k; F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Écriture en composantes.

Proposition 2

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. $E_1, \dots, E_k$ et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_k$ des bases respectives des $E_1, \dots, E_k$,

. $f : E_1 \times \dots E_k \to F$ une application.

L'application (restriction) suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_1, \dots, E_k; F) & \to & F^{\mathscr{B}_1 \times \dots \times \mathscr{B}_k} \\ f & \mapsto & f_{|\mathscr{B}_1 \times \dots \times \mathscr{B}_k} \end{array} \right. .$$

Remarques.

1. Autrement dit, comme pour les applications linéaires, les applications k-linéaires sont entièrement déterminées par les images des k-uplets de vecteurs des bases des $E_1, \dots, E_k$.

II Étude du cas $\mathscr{L}(E;F)$.

Applications symétriques.

Définition 2

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

Nous dirons que l'application k-linéaire f est *symétrique* si $\forall (x_1,\ldots,x_k) \in E^k$,

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,\ f(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots) = f(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots).$$

Remarques.

1. Ainsi une application k-linéaire est symétrique si la permutation de deux variable ne modifie l'image par la fonction.
2. L'ensemble des applications k-linéaires symétriques de E dans F est noté $\mathscr{S}_k(E;F)$.

Proposition 3

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

Si f est symétrique alors

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \forall (x_1,\ldots,x_k) \in E^k,\ f(x_1,\ldots,x_k) = f\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}\right).$$

Proposition 4

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

$(\mathscr{S}_k(E;F),+,\cdot)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}_k(E;F)$.

Applications antisymétriques.

Définition 3

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

Nous dirons que l'application k-linéaire f est *antisymétrique* si

$$\forall (x_1,\ldots,x_k) \in E^k,\ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,$$

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots x_n) = -f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n).$$

Remarques.

1. Ainsi une application k-linéaire est antisymétrique si la permutation de deux variable ne modifie l'image par la fonction.
2. L'ensemble des applications k-linéaires antisymétriques de E dans F est noté $\mathscr{A}_k(E;F)$.

Proposition 5

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

Si f est antisymétrique alors,

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \forall (x_1,\ldots,x_k) \in E^k,\ f(x_1,\ldots,x_k) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)}\right),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition 6

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

$(\mathscr{A}_k(E;F), +, \cdot)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}_k(E;F)$.

Remarques.

1. Si le corps n'est plus $\mathbb{R}$ mais un corps de caractéristique 2 alors $\mathscr{S}_k(E;F)$ et $\mathscr{A}_k(E;F)$ sont confondus.

Applications alternées.

Définition 4

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

Nous dirons que l'application k-linéaire f est *alternée* si

$$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E^k,\ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,$$

$$i \neq i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Remarques.

1. Ainsi une application multilinéaire est alternée si elle s'annule dès lors que deux variables sont égales.
2. Dans le cas $F = \mathbb{R}$ nous dirons que f est une forme k-linéaire alternée.

Proposition 7

Soient

. $k \in \mathbb{N}^*$,

. E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels,

. $f \in \mathscr{L}_k(E;F)$.

f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarques.

1. Cette équivalence n'est valable que si le corps des scalaires est de caractéristique différente de deux.