Généralités.

I Magma.

Définition.

Définition 1

Nous appellerons magma tout ensemble E muni d'une application, notée $*$, de $E \times E$ dans E. Ce magma sera noté $(E,*)$.

Remarques.

1. Une application de $E \times E$ dans E est appelée une *loi de composition interne sur E.*
2. Le fait que la loi soit interne est une forme de stabilité : les résultats de l'opération sont encore dans l'ensemble.

Exemples.

1. $(\mathbb{R},+)$ est un magma.
2. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de l'ensemble E muni de l'intersection ou de la réunion est un magma.
3. L'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi de composition des applications, $\circ$, est un magma.
4. $\mathbb{R}_-$ muni du produit des nombres réels n'est pas un magma car le produit n'est pas une loi interne sur $\mathbb{R}_-$.
5. Un espace vectoriel réel E muni du produit des vecteurs par des scalaires n'est pas un magma. La loi dans ce cas n'est pas interne.
6. Un espace vectoriel euclidien muni de son produit scalaire n'est un pas un magma.
7. La moyenne géométrique de deux nombres réels, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$, est une loi interne sur $\mathbb{R}$.

Propriétés des lois de composition interne.

Exercice 1.

Si E un ensemble fini de cardinal n, alors déterminez le nombre de lois de composition interne sur E.

Soit $(E,*)$ un magma.

La loi $*$ est dite *associative* si et seulement si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Si la loi est associative nous pourrons faire l'omission des parenthèses et écrire simplement $x * y * z$.

Nous dirons également que le magma $(E,*)$ est associatif.

Exemples.

1. L'addition dans $\mathbb{C}$ est associative.
2. Si E est un ensemble $(\mathscr{P}(E),\cap)$ est un magma associatif.
3. La demi-somme (la moyenne arithmétique) d'éléments de $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x+y}{2}$ n'est pas associative.
4. La loi de composition des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est associative.

La loi $*$ est dite *commutative* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x * y = y * x.$$

Exemples.

1. L'addition dans $\mathbb{R}$ est commutative mais pas la soustraction.
2. Le produit de matrices de taille supérieure à 2×2 n'est pas commutatif. Considérez $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $(\mathbb{Z},-)$ est un magma qui n'est ni associatif, ni commutatif.

Exercice 2.

Si E un ensemble fini de cardinal n, alors déterminez le nombre de lois de composition interne commutatives sur E.

Éléments réguliers d'un magma.

Un élément g d'un magma $(E,*)$ est dit *régulier à gauche* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ g * x = g * y \Rightarrow x = y.$$

De même un élément d sera dit *régulier à droite* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x * d = y * d \Rightarrow x = y.$$

Un élément sera dit *régulier* s'il est à la fois régulier à droite et à gauche.

Exemples.

1. Tous les éléments du magma $(\mathbb{R},+)$ sont réguliers.
2. Le seul élément du magma $(\mathbb{R},\times)$ qui ne soit pas régulier est 0.
3. Une matrice scalaire est un élément régulier du magma des matrices carrées muni de la multiplication.
   Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas régulière à gauche puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Éléments neutres.

Un élément e d'un magma $(E,*)$ est appelé un *neutre à gauche pour* $*$ si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ e * x = x.$$

Nous définirons de même le *neutre à droite pour* $*$ par :

$$\forall y \in E,\ y * e = y.$$

Enfin nous dirons qu'un élément est *neutre* (tout court) si et seulement si il est neutre à droite et à gauche.

Exemples.

1. 0 est un neutre pour $\mathbb{R}$ muni de l'addition.
2. Considérons la loi interne sur $\mathbb{N}$ définie par $* : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array} \right.$. Tous les éléments sont neutres à gauche mais aucun élément n'est neutre à droite.

Proposition 1 - unicité du neutre.

Soient :

. $(E,*)$ un magma,

. e_g et e_d des éléments de E.

Si e_g est neutre à gauche et e_d est neutre à droite alors $e_g = e_d$.

Démonstration 1

Nous voulons démontrer une implication nous supposons donc que les prémices sont vrais.

Soit e_g un neutre à gauche et e_d un neutre à droite.
Puisque e_g est neutre à gauche :

$$\forall x \in E,\ e_g * x = x.$$

Donc, en particulier
$$e_g * e_d = e_d \ (E_1).$$

Puisque e_d est neutre à droite :
$$\forall x \in E,\ x * e_d = x.$$

Donc, en particulier
$$e_g * e_d = e_g \ (E_2).$$

De (E_1) et (E_2) nous déduisons par transitivité : $e_g = e_d$.

Corollaire 1 - unicité du neutre.

Si un magma admet un neutre alors il est unique.

Remarques.

1. Ainsi, si un magma admet un neutre nous ne parlerons plus « d'un neutre » mais « du neutre ».
2. Un magma admettant un neutre est dit *unifère*.

Éléments symétrisables d'un magma.

Définition 2

Soient $(E,*)$ un magma admettant un élément neutre e.

Un élément x de E est dit *symétrisable à droite* si et seulement si
$$\exists y \in E,\ x * y = e.$$

De même x sera dit *symétrisable à gauche* si et seulement si
$$\exists y \in E,\ y * x = e.$$

x sera simplement dit *symétrisable.* s'il est à la fois inversible à droite et à gauche.
Dans ces cas nous dirons que y est un *symétrique de* x en précisant le cas échéant à droite ou à gauche.

Exemples.

1. Tous les éléments du magma $(\mathbb{R},\times)$ hormis 0 sont symétrisables et quelque soit $x \in \mathbb{R}^*$ son symétrique est noté $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

2. Tous les éléments du magma $(\mathbb{R},+)$ sont symétrisable et quelque soit $x \in \mathbb{R}$ son symétrique est noté $-x$.
3. Dans le magma $(\mathbb{Z},-)$ les symétriques à gauche et à droite sont distincts.
4. L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n + 1$, est inversible à gauche mais pas à droite.

Plusieurs lois de composition interne.

Si $(E,*)$ et $(E,\perp)$ sont des magmas, alors nous dirons que $\perp$ est *distributive à gauche sur* $*$ si et seulement si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\perp(y * z) = (x\perp y) * (x\perp z).$$

Nous définirions de même *distributive à droite*. Une loi sera simplement dite *distributive par rapport à une autre* si elles à la fois distributive à gauche et à droite par rapport à cette autre loi.

Exemples.

1. $\cap$ et $\cup$ sont distributives sur $\cap$ et $\cup$.
2. Dans $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive sur l'addition.
3. Dans l'ensemble des matrices carrées de taille n, la multiplication est distributive sur l'addition.
4. Dans $\mathbb{R}[X]$ la multiplication des polynômes est distributive sur leur addition.

Exercice 3.

Dans un magma $(E,\star)$ muni d'une seconde loi de composition interne $\times$, de sorte que $\times$ est distributive sur $\star$ la formule du binôme de Newton est-elle vrai ? Autrement dit la formule :

$$(a \star b)^n = \bigstar_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

Morphismes.

Définition 3

Soient :

. $(E,*)$ et $(F,\perp)$ deux magmas,

. $f : E \to F$.

Nous dirons que f est un *morphisme de magmas* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x * y) = f(x)\perp f(y).$$

Remarques.

1. Si de plus les magmas de départ et d'arrivée sont les mêmes alors on dit que f est un *endomorphisme* de magmas.
2. Si le morphisme est bijectif alors ont dit que c'est un *isomorphisme*.
3. Si f est un endomorphisme bijectif, alors f est appelé un *automorphisme*.
4. Un isomorphisme transporte la structure de magma d'un ensemble à un autre. Les résultats concernant la loi de composition interne qui seront vrais dans l'un sera vrai dans l'autre.

Exemples.

1. $\exp : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un morphisme de magma. C'est même un isomorphisme.
2. $\mathrm{Id} : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},\times)$ n'est pas un morphisme de magmas. En effet : $\mathrm{Id}(1+2) = \mathrm{Id}(3) = 3$ et $\mathrm{Id}(1) \times \mathrm{Id}(2) = 1 \times 2 = 2$ et donc $\mathrm{Id}(1+2) \neq \mathrm{Id}(1) \times \mathrm{Id}(2)$.

Exercice 4.

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes notée $*$ et $\perp$.
Démontrez : pour que $\perp$ soit distributive à gauche sur $*$ il faut et il suffit que, pour tout $a \in E$, $\gamma_a : x \mapsto a * x$ soit un endomorphisme du magma $(E,*)$

Proposition 2

(i) La composée de deux morphismes de magmas est un morphisme de magma.
(ii) L'identité est un morphisme de magma.
(iii) La réciproque d'un isomorphisme de magma est un isomorphisme de magma.

Démonstration 2

(i) Soient $(E,*)$, $(F,\perp)$ et $(G,\top)$ des magmas, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des morphismes de magmas.
Soit $(x,y) \in E^2$.

$$g \circ f(x * y) = g\left[f(x * y)\right]$$

Puisque f est un morphisme de magmas :

$$g \circ f(x * y) = g\left[f(x) \perp f(y)\right]$$

Puisque g est un morphisme de magmas :

$$\begin{aligned} g \circ f(x * y) &= g\left[f(x)\right] \top g\left[f(y)\right] \\ &= g \circ f(x) \top g \circ f(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est un morphisme de magmas.

(ii) Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(x * y) &= x * y \\ &= \mathrm{Id}(x) * \mathrm{Id}(y) \end{aligned}$$

Id est un morphisme de magmas.

(iii) Soit $f : (E,*) \to (F,\perp)$ un isomorphisme de magmas.
Soient x_F et y_F des éléments de F.
Puisque f est une bijection il existe x_E et y_E des éléments de E tels que :

$$f(x_E) = x_F \quad \text{et} \quad f(y_E) = y_F.$$

Donc :

$$f^{-1}(x_F \perp y_F) = f^{-1}\left[f(x_E) \perp f(y_E)\right]$$

Puisque f est un morphisme de magmas :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_F \perp y_F) &= f^{-1}\left[f\left(x_E * y_E\right)\right] \\ &= f^{-1} \circ f\left(x_E * y_E\right) \\ &= x_E * y_E \\ &= f^{-1}(y_E) * f^{-1}(y_F) \end{aligned}$$

f^{-1} est donc un morphisme de magmas.

Remarques.

1. L'identité entre deux magmas $(E,*)$ et $(E,\perp)$ n'est pas forcément un morphisme. Par exemple : $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}[X],\times) \to (\mathbb{R}[X],\circ)$.

Magmas construits classiques.

Proposition 3

Soient :
. X un ensemble,
. $(E,*)$ un magma.
Nous pouvons définir une loi, notée encore $*$, sur E^X par

$$\forall (f,g) \in \left(E^X\right)^2,\ \forall x \in X,\ (f * g)(x) = f(x) * g(x).$$

Cette loi est appelée *une extension à E^X* de la loi $*$ de E.

Proposition 4

Soient :
. $(E,*)$ un magma,
. $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Nous pouvons définir une loi, notée encore $*$, sur $\mathscr{P}(E)$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A * B = \{x \in E \mid \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a * b\}.$$

Cette loi est appelée *une extension à $\mathscr{P}(E)$* de la loi $*$ de E.

Définition 4

Une partie A d'un magma $(E,*)$ est dite *stable* si et seulement si

$$\forall (x,y) \in A^2,\ x * y \in A.$$

Proposition 5

Soient :
. $(E,*)$ un magma,
. A une partie stable de E.
Nous pouvons définir une loi, notée encore $*$, sur A par

$$\left\{\begin{array}{lcl} A\times A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & x*y \end{array}\right. .$$

Cette loi est appelée *la loi de composition interne induite sur A* par la loi $*$ de E.

Proposition 6

Soient :
. $(E,\perp)$ et $(F,\top)$ deux magmas.

Nous pouvons définir un magma appelé *magma produit* le magma $(E\times F,*)$ où la loi $*$ est définie par :

$$\forall\,((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in E\times F,\ (x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1\perp x_2\ ,\ y_1\top y_2).$$

II Monoïde.

Définition.

Définition 5

Nous appellerons monoïde tout magma unifère et associatif

Remarques.

1. Unifère signifie qu'il admet un neutre (à droite et à gauche).
2. Ainsi un monoïde est un ensemble E muni d'une loi de composition interne tel que :
   (i) $\forall(x,y,z)\in E^3,\ x*(y*z)=(x*y)*z.$
   (ii) $\exists e\in E,\ \forall x\in E,\ e*x=x*e=x.$
3. La notation $\times$ est usuellement réservée à un monoïde. La notation $+$ est usuellement réservée à un monoïde commutatif.

Éléments symétrisables d'un monoïde.

Proposition 7

Soient :
. $(E,*)$ un monoïde,
. x, y_d et y_g des éléments de E.

Si y_d est un symétrique à droite de x et y_g un symétrique à gauche de x alors $x_d = x_g$.

Démonstration 3

Soit y_d (resp. y_g) le symétrique à droite (resp. à gauche) de x et e le neutre du monoïde $(E,*)$.

Nous avons donc
$$x * y_d = e.$$

Nous en déduisons
$$y_g * (x * y_d) = y_g * e.$$

Un monoïde étant associatif :
$$(y_g * x) * y_d = y_g * e.$$

Puisque y_g est l'inverse à gauche de x :
$$e * y_d = y_g * e.$$

e étant le neutre :
$$y_d = y_g.$$

Corollaire 2 - unicité du symétrique.

Si un élément d'un monoïde est symétrisable alors son symétrique est unique.

Remarques.

1. Ainsi dans un monoïde, si un élément est symétrisable à gauche alors le symétrique à gauche est le seul candidat possible comme symétrique à droite.
2. Lorsque la loi interne est notée multiplicativement nous parlerons d'un *inverse* plutôt que d'un symétrique. Si la loi est notée additivement nous parlerons d'un *opposé*.
3. Le symétrique de x est généralement noté x^{-1}.

Proposition 8

Soient :

. $(E,*)$ un monoïde,

. x et y des éléments de E.

Si x et y sont symétrisables, alors $x*y$ l'est aussi alors et

$$(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

Démonstration 4

Supposons donc x et y symétrisables.

Autrement dit, il existe x^{-1} et y^{-1} tels que $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ et $y*y^{-1} = y^{-1}*y = e$.

Alors du fait de l'associativité dans un monoïde :

$$(x*y)*(y^{-1}*x^{-1}) = x*(y*y^{-1})*x^{-1}$$

Donc en notant e le neutre du monoïde :

$$\begin{aligned}(x*y)*(y^{-1}*x^{-1}) &= x*e*x^{-1}\\ &= x*x^{-1}\\ &= e\end{aligned}$$

Donc $y^{-1}*x^{-1}$ est un symétrique de $x*y$ qui est donc bien symétrisable.

Exemples.

1. Si $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^*\\ x & \mapsto & x^2\end{array}\right.$, nous alors la fonction $\ln\circ f$ est inversible et son inverse est $f^{-1}\circ\exp$ où f^{-1} est la restriction de racine carrée à $\mathbb{R}_+^*$.

III Définition du groupe.

Définition 6

Nous dirons d'un monoïde $(G,*)$ qu'il est un *groupe* si et seulement si tout élément de G admet un symétrique.

Remarques.

1. Ainsi un magma $(G,*)$ est un groupe si et seulement si :

IV Définition de l'anneau.

Définition 7

Un ensemble A muni de deux lois $\perp$ et $*$ est appelé un *anneau* si et seulement si :

- $(A,*)$ est un groupe commutatif,
- $\perp$ est associative,
- $\perp$ est distributive sur $*$,
- A admet un neutre pur $\perp$.

V Définition du corps.

Définition 8

Un ensemble K muni de deux lois $\perp$ et $*$ est appelé un *corps* si et seulement si :

- $(K, *, \perp)$ est un anneau,
- $e_* \neq e_\perp$,
- tout élément de $K \setminus \{e_*\}$ est symétrisable pour $\perp$.

VI Définition de l'espace vectoriel.

Définition 9

Soient :

. $(K, +, \times)$ un corps,

. E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe $\begin{array}{ccc} K \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$.

Nous dirons que E est un K-espace vectoriel si et seulement si

(i) $(E, +)$ est un groupe commutatif,

(ii) $\forall (\lambda, \mu) \in K^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

(iii) $\forall \lambda \in K$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $\forall (\lambda, `mu) \in K^2$, $\forall x \in E$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(v) $\forall x \in E$, $1x = x$.