Espace préhilbertien réel.

I Produit scalaire.

Définition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Nous appellerons *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que

(i) φ est *symétrique* : $\forall x,y \in E,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

(ii) φ est *linéaire par rapport à la deuxième place* : $\forall x,y,y' \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(x,\lambda y + y') = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y')$.

(iii) φ est *positive* : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$.

(iv) φ est *définie* : $\forall x \in E,\ (\varphi(x,x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$.

Remarques.

1. (i) et (ii) équivalent à dire que φ est une forme bilinéaire symétrique. La définition choisie minimise les vérifications.

   La définition peut donc être reformulée : φ est un produit scalaire si et seulement si φ est une forme bilinéaire symétrique, définie, positive.
2. Nous noterons $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire.

Exemples.

1. *Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$* (ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

$$\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k.$$

2. Une généralisation de l'exemple précédent à la dimension infinie est l'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites de carrés sommables muni du produit scalaire

$$\langle u,v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

3. Dans l'espace $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$ il est possible de définir un produit scalaire en associant aux éléments $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$ le réel $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$. Autrement dit il s'agit du même produit scalaire que précédemment mais appliqué aux suites à supports finis (ce qui rend sans objet les problèmes de convergences).

4. Soient $a < b$ deux réels et $(f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^2$ (l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$). Cet espace peut être muni du produit scalaire
$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$
5. Dans l'espace vectoriel des matrices $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'application $(A,B)^2 \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire. Ce produit scalaire coïncide sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ avec celui $\mathbb{R}^n$.
6. Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré par une mesure positive. L'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}^2(\Omega) \times \mathscr{L}^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_\Omega fg\ \mathrm{d}\mu \end{array} \right.$$
est une application bilinéaire symétrique positive mais n'est pas définie. En effet toute application f nulle hormis sur un ensemble de mesure nulle vérifiera bien $\varphi(f,f) = 0$.
7. Soient $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré par une mesure positive. L'application
$$\langle \cdot,\cdot \rangle_{L^2} \left\{ \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_\Omega fg\ \mathrm{d}\mu \end{array} \right.$$
est un produit scalaire.
En particulier si μ est la mesure de Lebesgue, $L^2(\Omega)$ peut être muni du précédent produit scalaire.

Exercice 1

Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $\omega \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ pour que
$$\varphi : (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\ \mathrm{d}t$$
définisse un produit scalaire sur l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[a,b]$.

Correction exercice 1

La fonction ω est appelée une fonction de poids. Elle permet de construire d'autres produits scalaires.

(i) Symétrie : découle de la commutativité du produit.

(ii) Linéarité par rapport à la deuxième place : découle de la distributivité du produit sur l'addition et de la linéarité de l'intégration.

(iii) Positivité : ?

(iv) Définition :?

Démontrons que φ est un produit scalaire si et seulement si $\omega \geqslant 0$ et $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.

* Si $\omega \geqslant 0$ alors il est clair que φ est positive.

  Supposons que les zéros de ω forment un ensemble d'intérieur vide et démontrons qu'alors φ est définie.
  Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. Démontrons qu'alors $f = 0$.
  Puisque $f^2 w$ est continue et positive et que $\int_a^b f^2 w = 0$ alors $f^2\omega = 0$. On en déduit que $f = 0$ sauf éventuellement en les zéros de ω, mais comme ceux-ci forment un ensemble d'intérieur vide, par continuité de f nécessairement $f = 0$.
* Supposons que φ est définie et positive et démontrons qu'alors $\omega \geqslant 0$ et que l'ensemble de ses zéros est d'intérieur vide.
  Sèche.

Exercice 2

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$

$\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)dt$

$\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$(P,Q) \to \displaystyle\int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt.$

Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P|A\rangle = P(0)?$

Propriétés du produit scalaire.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

$$\forall x \in E,\ \langle 0,x\rangle = 0.$$

Démonstration 1

Découle de la $\mathbb{R}$-linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\langle y,x\rangle - \langle y,x\rangle &= 0\\ \langle y,x\rangle + \langle -y,x\rangle &= 0\\ \langle y-y,x\rangle &= 0\\ \langle 0,x\rangle &= 0\end{aligned}$$

Proposition 2 - Caractérisation de l'égalité avec le produit scalaire

Soient E un espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E, $(x,y) \in E^2$.

$$(x = y) \Leftrightarrow (\forall z \in E,\ \langle x,z\rangle = \langle y,z\rangle)\ .$$

Démonstration 2

Par bilinéarité et car le produit scalaire est défini.

Remarques.

1. Ce résultat reste donc valable pour n'importe quel forme bilinéaire définie.

Corollaire 1

Soient E un espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E, $(x,y) \in E^2$.

$\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ x & \mapsto & \langle x,\cdot\rangle \end{array}\right.$ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de E dans son dual E^*.

II Espace préhilbertien réel.

Définition 2

Nous appellerons *espace préhilbertien réel* tout couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ formé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Remarques.

1. Sur un espace vectoriel donné E il n'y a pas unicité de la structure d'espace préhilbertien qui varie avec le choix du produit scalaire.

Exemples.

1. Les exemples vus pour le produit scalaire correspondent à des exemples d'espaces préhilbertiens.
2. Les espaces euclidiens sont des exemples d'espaces préhilbertiens réels.
3. Si $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré par une mesure positive alors $\left(L^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}\right)$ est un espace préhilbertien.

III Norme euclidienne.

Définition.

Définition 3

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

Nous appellerons *norme euclidienne* la norme sur E définie par

$$||\cdot|| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array} \right.$$

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'il faut établir que la norme euclidienne est bien une norme.
2. Lorsqu'il est question d'une norme sur un espace préhilbertien sans que celle-ci soit précisée c'es qu'il s'agit précisément de cette norme euclidienne. Il s'agit d'une norme canonique sur un espace préhilbertien.

Exemples.

1. $(f,g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ est un produit scalaire sur$\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, ce qui confère à cet ensemble une structure d'espace préhilbertien réel.

Propriétés de la norme euclidienne.

Proposition 3 - Identités remarquables

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2.$
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x+y,x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2.$

Démonstration 3

Découle de la bilinéarité du produit scalaire.

Corollaire 2 - Identités de polarisation

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$.
2. $\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$

Démonstration 4

Découle des identités remarquables.

Exercice 4

Démontrez l'*égalité du parallélogramme* :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

On déduit de la précédente par changement de variable l'*identité de la médiane* :

$$\forall (x,y,z)\in E^3,\ ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = \frac{1}{2}\left(||y-z||^2 + ||x - \frac{1}{2}(y+z)||^2\right).$$

Réciproquement, d'après le théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan, toute norme vérifiant cette identité est préhilbertienne, c'est-à-dire dérive d'un produit scalaire.
Ce résultat est intéressant pour démontrer un théorème de projection orthogonale.

Proposition 4 - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

$$\forall (x,y)\in E^2,\ |\langle x,y\rangle| \leqslant ||x||\cdot||y||$$

Et il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration 5

Exercice 5

Soient x,y et z trois réels tels que $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.)

Proposition 5 - Inégalité triangulaire

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

De plus $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration 6

Caractérisation d'un espace préhilbertien.

Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan

IV Orthogonalité.

L'orthogonal d'une partie vide a-t-elle un sens ?

Orthogonalité de vecteurs.

Définition 4

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

Nous dirons que deux éléments x et y de E sont *orthogonaux* si et seulement si : $\langle x,y\rangle=0$.
Et dans ce cas nous noterons $x\perp y$.

Remarques.

1. Puisque $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire (donc une forme bilinéaire définie) seul le vecteur nul est orthogonal à lui même.
2. La relation d'orthogonalité est une relation binaire symétrique mais pas transitive, ni réflexive (hormis pour le vecteur nul : remarque ci-dessus).

Proposition 6 - Relation de Pythagore

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel.

$x\perp y\Leftrightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Démonstration 7

1. $\Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle$$

Par bilinéarité :

$$\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

Par symétrie :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Puisque $x \perp y$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2.

Remarques.

1. Il s'agit d'une caractérisation de l'orthogonalité.
2. Avec le vocabulaire de la géométrie affine on retrouve bien le théorème de Pythagore enseigné au collège.
3. Pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ on a bien $\left\|\sum_{i=1}^p x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$. Par contre la réciproque est fausse. Dans $\mathbb{R}^2$ usuel, la famille (x_1,x_2,x_3) définie par $x_1=(1,2)$, $x_2=(0,2)$ et $x_3=(0,-1)$, vérifie

$$\|x_1+x_2+x_3\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2$$

et pourtant n'est pas orthogonale (puisque trivialement pas libre).
4. Dans le cas d'espaces préhilbertiens complexes la réciproque n'est pas vraie.

Orthogonalité de parties.

Définition 5

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, A et B des parties de E.

Nous dirons que A *est orthogonale à* B, et nous écrirons $A\perp B$, si et seulement si

$$\forall x\in A, \forall y\in B,\ \langle x,y\rangle = 0.$$

Proposition 7- Caractérisation de l'orthogonalité de parties

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, A et B des parties de E.

$$A \perp B \Leftrightarrow \mathrm{Vec}(A) \perp \mathrm{Vec}(B).$$

Démonstration 8

* $\Leftarrow$ est triviale.
* $\Rightarrow$. S'obtient aisément en utilisant le fait que A (respectivement B) est une famille génératrice de $\mathrm{Vec}(A)$ (resp. $\mathrm{Vec}(B)$).

Remarques.

1. Autrement dit parler de l'orthogonalité entre des parties revient à traiter de l'orthogonalité des sous-espaces vectoriels, ou de n'importe quelle partie génératrice (comme une base par exemple).

Définition 6

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie de E.

Nous appellerons *orthogonal de A*, et nous noterons $A^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous ceux de A.
Autrement dit :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle a,x\rangle = 0\}.$$

Remarques.

1. En remarquant $A^{\perp} = \cap_{a\in A} \ker(\langle a,\cdot\rangle)$ nous pouvons dire que $A^{\perp}$ est la plus grande partie de E orthogonale à A. Nus pouvons aussi déduire de cette remarque que $A^{\perp}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E.

Proposition 8

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie de E.

$A^{\perp}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E.

Démonstration 9

Démontrons que $A^{\perp}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E.

* $0 \in A^{\perp}$ donc $A \neq \emptyset$.
* $A^{\perp} \subset E$.

* La stabilité de $A^\perp$ par combinaisons linéaires écoule de la bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

$A^\perp$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de E.

Proposition 9 - Propriétés calculatoires sur les orthogonaux

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien.

Si A et B sont des parties quelconques de E, alors :

(i) $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$.

(ii) $A^\perp = (\mathrm{Vec}(A))^\perp$.

(iii) $A \subset A^{\perp\perp}$.

(iv) $E^\perp = \{0\}$.

(v) $\{0\}^\perp = E$.

(vi) $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :

(vii) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(viii) $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

(ix) Si F est de dimension finie alors $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration 10

(i) Supposons $A \subset B$.

Démontrons que $\forall b \in B^\perp$, $b \in A^\perp$.

Soit $b \in B^\perp$ et $a \in A$.

$$\begin{cases} a \in A \\ A \subset B \end{cases} \Rightarrow a \in B.$$

Or $b \in B^\perp$ donc $\langle b,a\rangle = 0$.

Finalement $B^\perp \subset A^\perp$.

(ii) $A \subset \mathrm{Vec}(A)$ donc, d'après le cas précédent $\mathrm{Vec}(A)^\perp \subset A^\perp$.

Démontrons : $(\mathrm{Vec}(A))^\perp \subset A^\perp$.

Si $x \in \mathrm{Vec}(A)$ alors x peut s'écrire comme une combinaison $\mathbb{R}$-linéaire d'éléments de A : $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p$.

Soit $y \in A^{\perp}$.

$$\begin{aligned}\langle a,y\rangle &= \langle \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_p a_p , y\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle a_i , y\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $x \in A^{\perp}$.

$$\boxed{(\mathrm{Vec}(A))^{\perp} \subset A^{\perp}.}$$

(iii) Démontrons : $A \subset A^{\perp\perp}$.

Soit $a \in A$.
Par construction : $A^{\perp\perp} = \{x \in E \mid \forall b \in A^{\perp},\ \langle b,x\rangle = 0\}$.
Or par définition de l'orthogonal : $\forall b \in A^{\perp}$, $\langle b,a\rangle = 0$, donc $a \in A^{\perp\perp}$.

$$\boxed{A \subset A^{\perp\perp}.}$$

(iv) Soit $x \in E^{\perp}$. En particulier $\langle x,x\rangle = 0$ donc $x = 0$.
Et puisque $E^{\perp}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : $0 \in E^{\perp}$.

$$\boxed{E^{\perp} = \{0\}.}$$

(v) Évident.

(vi) Si $x \in A \cap A^{\perp}$ alors $\langle x,x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.

(vii) Démontrons que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

* $F \subset F + G$ donc $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$. De même : $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$. Donc : $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
* Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Démontrons que $x \in (F+G)^{\perp}$.
  Soit $y = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_s g_s \in F + G$.

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \langle x, \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_s g_s\rangle \\ &= \alpha_1 \langle x,f_1\rangle + \cdots + \alpha_r \langle x,f_r\rangle + \beta_1 \langle x,g_1\rangle + \ldots \beta_s \langle x,g_s\rangle\end{aligned}$$

  Et puisque $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$:

$$\langle x,y\rangle = 0$$

  Donc $x \in (F+G)^{\perp}$ et enfin $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

$$\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.}$$

(viii) $\begin{cases} F\cap G \subset F \\ F\cap G \subset G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F^\perp \subset (F\cap G)^\perp \\ G^\perp \subset (F\cap G)^\perp \end{cases} \Rightarrow F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp.$

(ix) Nous avons déjà établi que $F \subset F^{\perp\perp}$.

Démontrons que $F^{\perp\perp} \subset F$.

Remarques.

1. Si E est de dimension finie (donc si l'espace est euclidien) et que F et G en sont de sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels alors
   * $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
   * $F = F^{\perp\perp}$.
   * $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Exemples.

1. L'inclusion $A \subset A^{\perp\perp}$ peut être stricte.
   Dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ considérons la partie $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$.
   $A^\perp = \mathrm{Vec}(A)^\perp = \{0\}$ car A contient en particulier tous les polynômes $X^m - 1$, avec $m \in \mathbb{N}$, qui forment une base de E.
   Nous en déduisons que : $A^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$.
   Or clairement $A \neq E$ donc $A \neq A^{\perp\perp}$.
2. L'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ peut être stricte.
   Reprenons l'exemple précédent en notant $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vec}(\{1\})$.
   $F \cap G = \{0\}$ donc $(F\cap G)^\perp = E$.
   $F^\perp + G^\perp$ est l'hyperplan formé des polynômes qui s'annulent en 0.
   Donc $F^\perp + G^\perp \neq (F\cap G)^\perp$.

Famille orthogonale.

Définition 7

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Nous dirons que $(x_i)_{i\in I}$ *est une famille orthogonale* si et seulement si les éléments de $(x_i)_{i\in I}$ sont orthogonaux deux à deux.
Autrement dit :

$$\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow x_i \perp x_j.$$

Nous dirons que $(x_i)_{i\in I}$ *est une famille orthonormale* si et seulement si les éléments de $(x_i)_{i\in I}$ sont orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Autrement dit :

$$\begin{cases} \forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow x_i \perp x_j \\ \forall i\in I,\ \|x_i\| = 1 \end{cases}$$

Remarques.

1. Ainsi $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si et seulement si :

$$\forall (i,j)\in I^2,\ \langle x_i,x_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Proposition 10

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Si $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale et que les x_i sont tous non nuls alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est $\mathbb{R}$-libre.

Démonstration 11

Montrons que $(x_i)_{i\in I}$ est $\mathbb{R}$-libre.

Soit $I_0 \subset I$ une partie finie de I et $(a_i)_{i\in I_0}\in\mathbb{R}^{I_0}$ telle que

$$\sum_{i\in I_0} a_i x_i = 0.$$

Nous en déduisons successivement

$$\forall j\in I_0,\ \left\langle x_j, \sum_{i\in I_0} a_i x_i \right\rangle = 0$$

$$\forall j\in I_0,\ a_j\|x_j\| = 0$$

Et puisque $\forall i \in I$, $\|x_i\| \neq 0$:

$$\forall j \in I_0,\, a_j = 0$$

$(x_i)_{i\in I}$ est $\mathbb{R}$-libre.

Exemples.

1. Dans l'espace $E = \mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ munit du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, les familles $(\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$, et leur réunion, sont des familles libres puisque orthogonales.

Exercice 6

Soient $E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, $p \in \mathbb{N}$, $(F_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!],\, (i \neq j) \Rightarrow (F_i \perp F_j).$$

Démontrez que les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels $F_1,\ldots,F_p$ sont en somme directe.

Procéder d'orthogonalisation de Gram-Schmidt d'une famille dénombrable.

V Base d'un espace préhilbertien.

Si tous espace vectoriel admet une base (découle du lemme de Zorn) celle-ci peut être complexe et le plus souvent impossible à expliciter. Nous nous contenterons souvent de familles plus petites mais surtout plus simples à expliciter qui sans être des bases engendrent néanmoins des espaces vectoriels denses dans l'espace vectoriel étudié.

Famille totale.

Définition 8

Soient :

. $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel,

. $A \subset E$.

A est appelée une *partie totale de E* si $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = E$.

Remarques.

1. Pour qu'il y ait une famille total il faut donc nécessairement que l'espace E soit un fermé. Ce sera toujours le cas lorsque E sera un espace de Hilbert (donc un espace préhilbertien complet).
2. E est séparable si et seulement si il existe une famille totale dans E.

Base de Hilbert.

VI Espaces de Hilbert.

Afin de retrouver certains résultats des espaces euclidiens dans les espaces préhilbertiens, nous nous placerons dans des espaces préhilbertiens réels complets que nous appellerons Espaces de Hilbert.

Définition 9

Une famille $F = (e_n)_{n\in\mathbb{N}ou\mathbb{Z}}$ est appelée une base orthonormale si F et orthonormale et totale.

Dans ce cas l'espace est forcément séparé.
De plus alors E est forcément hilbertien.

Proposition 11

(e_n) bon de E espace préhilbertien.

1. $x = \sum\langle x,e_k\rangle e_k$.
2. $\langle x,y\rangle = \sum\langle x,e_k\rangle\langle x,e_k\rangle$.
3. $\|x\|^= \sum|\langle x,e_k\rangle|^2$.

Démonstration 12

1. $Em = \mathrm{Vect}(e_{n\leqslant m})$. $x - S_m(x) \in E_m^\perp$. Puis avec Pythagore : $\|x\|^2 = \|x - S_m\| + \|S_m\|$.
2.

Exemples.

1. $\mathscr{C}_{2\pi}$ fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}$.
   C'est un espace préhilbertien. les $e_k = \mathrm{e}^{ikt}$ forment une famille orthonormale pour que ce soit une base il faut qu'elle soi totale.
   Considérons A les polynômes de e^{it} alors avec une version de Stone-Weierstrass qui va bien il est possible d'approcher une fonction f aussi précisément que

possible avec une convergenc uniforme donc il y aura un convergence en norme 2 (celle associée au produit scalaire).

$\mathscr{C}_{2\pi}$ est donc préhilbertien avec une bon mais pas hilbertien.

Notion de projection P_m dur E_m parallèlement à $E_m^\perp$ (squi lui est supplémentaire).

Pour une fonction f de $\mathscr{C}([0;2\pi])$. Puis que les e^{ikt} forent une base orthonormale : $\sum_{k=-n}^{n}\langle f,e_k\rangle$ converge normalement (pour la norme 2) vers f. Il n'y a donc pas nécessairement de convergence simple (?).

Proposition 12

Tout espace préhilbertien séparable admet une base orthonormale.

Démonstration 13

E séparable donc il existe un ensemble dénombrable dense ou encore il existe (u_n) dénombrable qui soit total dans E.

Sas perte de généralité on peut supposer les (u_n) sont lires.

1. On construit avec le procédé de Gram-Schmidt une famille orthonormale (e_n) à partir de la famille (u_n).
2. Il faut vérifier que la famille (e_n) est une base orthonormale.