Espaces de Hilbert.

I Sous-titre

Définition 1

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la nore associée au produit scalaire de l'espace préhilbertien.

Exemples.

1. $\mathbb{K}^n$ $\langle x,y \rangle = \sum x_i \overline{yi}$
2. $l^2(\mathbb{N})$ avec le même produit scalaire que ci-dessus.
3. L'ensemble $\mathscr{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme N_2 est préhilbertien mais pas hilbertien. Il n'est pas complet : suite de fonctions affines par morceaux de Cauchy mais pas convergente dans $\mathscr{C}([a,b])$.
4. $L^2([a,b])$ est hilbertien.

Remarques.

1. $l^2(\mathbb{N})$ s'identifie complètement à son dual topologique (norme de Hölder).

Définition 2

E préhilbertien.
$\{e_i | i \in I\}$ est appelée famille orthonormale si $\langle ei | e_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Proposition 1

E préhilbertien séparable de bon (e_k).
Sont équivalents

1. E est un hilbert (complétude donc)
2. $\forall (\lambda_k) \in \ell^2, \exists x \in E,\ \langle x,e_k \rangle = \lambda_k$.

Démonstration 1

1. $1 \Leftrightarrow 2$.
2. $U : x \mapsto (\langle xe_k \rangle)_k$ est linéaire et isométrique donc comme par hypothèse U est surjectif il est aussi injectif. Isométrie isomorphe donc transmission de la complétude.