Anneau commutatif intègre.

I Définition

Définition 1

Un anneau commutatif (unitaire) $(A, +\times)$ est dit intègre si

(i) A n'est pas l'anneau nul ($1_A \neq 0_A$),

(ii) A n'admet pas de diviseur de 0_A.

Remarques.

1. Dire que A n'admet pas de diviseur de 0_A signifie que

$$\forall (a, b) \in A^2,\ a \times b = 0_A \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

   Autrement dit un anneau intègre est un anneau dans lequel il est possible de résoudre des équations produit nul comme dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. $(\mathbb{Z}, +\times)$ est un anneau intègre.
2. Tout corps commutatif est un anneau intègre.
3. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\times)$ n'est pas un anneau intègre.
4. Tout sous-anneau d'un anneau intègre est un anneau intègre.
5. $(\mathbb{D}, +\times)$ est anneau commutatif intègre qui n'est pas un corps.
6. Si A est un anneau commutatif intègre, $A[X_1, \ldots X_n]$ est un anneau intègre.