

Rallye mathématique du Centre

Épreuve préparatoire - 2^{de}

Décembre 2014

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.

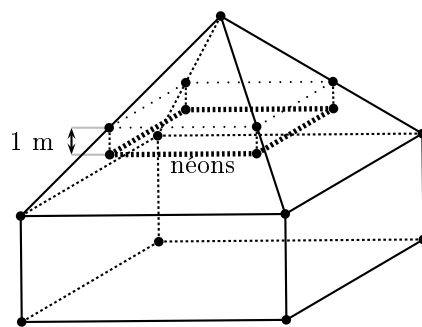
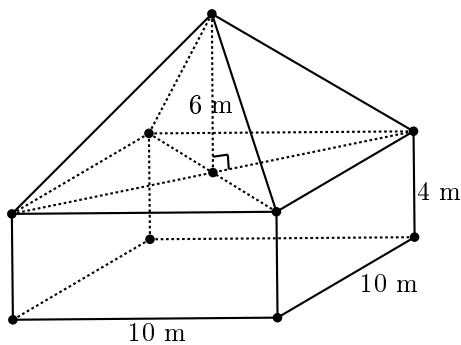
Les solutions partielles seront examinées.

Bon courage et rendez-vous le 17 mars pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1

« Et la lumière fut »

8 points

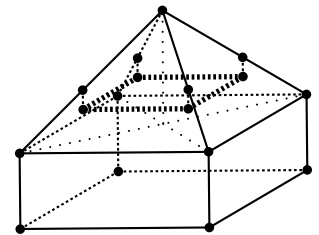


Un bâtiment est formé :

- d'un pavé droit à base carrée de côté 10 m et de hauteur 4 m ;
- d'une pyramide régulière à base carrée de côté 10 m et de hauteur 6 m qui forme le toit.

On veut accrocher un système d'éclairage dans cette salle. Ce système est composé de néons qui forment un carré horizontal de 7 m de côté.

Chaque sommet du carré formé par les néons est relié à une arête de la pyramide grâce à un filin vertical de 1 m de longueur.



1. A quelle distance du sommet de la pyramide les quatre filins sont-ils fixés ?
2. A quelle hauteur du sol se trouvent les néons ?

Exercice n°2

Just an average box

5 points

In a sequence of six numbers, every number after the first two is the average of the previous two numbers.

The 4th number in the sequence is 22 and the 6th number in the sequence is 45.

Determine all six numbers in the sequence.

?	?	?	22	?	45
---	---	---	----	---	----

Exercice n°3**A côté de la plaque****5 points**

Les numéros d'immatriculation en Epsilonie sont composés de deux lettres et trois chiffres.

Les plaques sont immatriculées avec le système suivant :

de **AA-001** à **AA-999** puis de **AB-001** à **AB-999** on progresse jusqu'à **AZ-999**.

La suivante est **BA-001** et ainsi de suite.

Le 1er avril 2014, la dernière plaque mise en circulation fut **CK-854**.

Ce jour-là, un accident survint dans le village de Sigmato.

Le chauffard responsable de l'accident s'enfuit à bord de son véhicule. Arrivé sur les lieux de l'accident, un gendarme enquêta.

- Le gendarme interrogea M. Iota, témoin de l'accident.
Celui-ci ne se souvint que de la première lettre de la plaque : C .
Combien de véhicules immatriculés correspondent à cette information ?
- Le gendarme interrogea Mme Kappa. Celle-ci se souvint qu'il y avait le chiffre 7 dans le numéro d'immatriculation.
Avec cette nouvelle information, combien de véhicules immatriculés reste-t-il maintenant ?
- Puis le gendarme interrogea Mme Lambda. Celle-ci se souvint que la partie numérique de la plaque était palindromique (comme par exemple : 181, 525...).
Finalement, combien de véhicules immatriculés suspects reste-t-il ?

Exercice n°4**A table!****5 points**

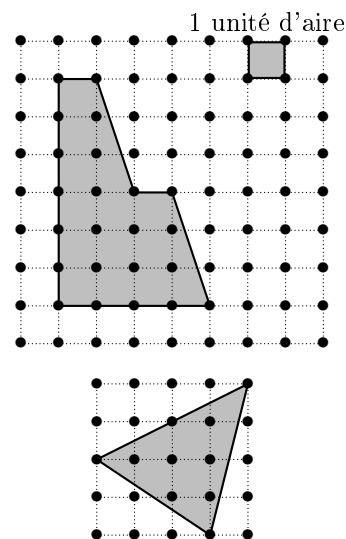
Dans une grande salle des fêtes, le traiteur prépare les tables pour accueillir les 404 convives. Il dispose d'un grand nombre de tables, des rondes de 10 personnes et des carrées de 8 personnes.

- L'organisateur lui demande de mettre le moins de tables possibles sans laisser de place inoccupée.
Quel nombre de tables de chaque sorte le traiteur doit-il préparer ?
- L'organisateur se ravise et demande alors que les nombres de tables rondes et carrées soient les plus proches possibles, toujours sans aucune place inoccupée.
Quel nombre de tables de chaque sorte le traiteur doit-il préparer ?

Exercice n°5**Pick, l'as des carreaux****8 points**

On considère un quadrillage formé de carrés de côté une unité de longueur.

- Déterminer l'aire exacte de l'hexagone ci-contre, exprimée en unités d'aire.
 - Georg explique qu'il a calculé l'aire de ce polygone d'une autre façon :
« *J'ai compté le nombre b de points du quadrillage situés sur le bord du polygone, puis le nombre i de points du quadrillage situés à l'intérieur du polygone.*
L'aire est égale à $\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1$. »
Vérifier que la méthode de Georg donne le bon résultat.
- Alexander dit : « *La formule de Georg est encore vraie pour le triangle ci-contre.* »
Qu'en pensez-vous ?



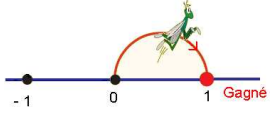
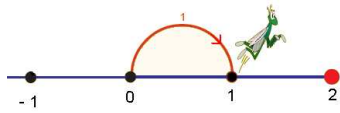
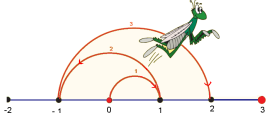
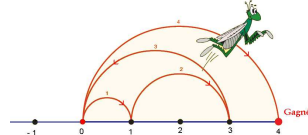
Le mathématicien autrichien Georg Alexander PICK a montré en 1899 que la formule était valable pour tous les polygones dont les sommets sont des points du quadrillage.

- Construire un octogone dont les sommets sont des points du quadrillage et qui a pour aire 10 unités d'aire.

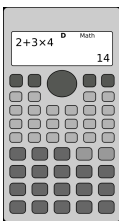
Exercice n°6**Les "Criket Numbers" de la sauterelle****8 points**

Sur une ligne graduée régulièrement par les nombres entiers relatifs une sauterelle effectue, au départ de zéro, des bonds consécutifs de longueur croissante soit en avant soit en arrière. Elle doit commencer par un bond d'une unité, puis de deux unités à partir du point où elle se trouve, puis de trois unités à partir du nouveau point, etc ...

L'objectif pour elle est que son dernier bond (le n -ième) – de longueur n – lui permette de tomber exactement sur le nombre n , dans ce cas n est un "Criket Number". (au cours de ses bonds intermédiaires, elle a parfaitement le droit de dépasser le nombre n , ou même d'aller à gauche de 0).

<p style="text-align: center;">$n = 1$</p>  <p>La sauterelle fait un bond de 1 unité en avant. Elle tombe en 1! Gagné! 1 est un "Criket Number"</p>	<p style="text-align: center;">$n = 2$</p>  <p>La sauterelle fait un bond de 1 unité vers l'avant, puis de 2 unités vers l'avant. Elle ne retombe pas en 2 mais en 3. Essaye encore!</p>
<p style="text-align: center;">$n = 3$</p>  <p>La sauterelle effectue un bond de 1 unité vers l'avant, puis de 2 unités vers l'arrière, puis de 3 unités vers l'avant. En trois bonds, elle devait tomber en 3. Essaye encore!</p>	<p style="text-align: center;">$n = 4$</p>  <p>La sauterelle effectue un bond de 1 puis de 2 unités vers l'avant et tombe sur le 3 (vers l'arrière) puis de 4 vers l'avant et tombe sur le 4 comme attendu. Gagné! 4 est un "Criket Number"</p>

- 3 et 8 sont-ils des "Criket Numbers"?
- 5 est un "Criket Number". Dessiner une suite de bonds possibles sur une droite graduée.
- A partir de 5, la sauterelle peut-elle atteindre 9 avec quatre bonds supplémentaires?
- Quels sont les sept premiers "Criket Numbers" (non nuls)?

Exercice n°7**Un exercice qui ne manque pas de sel****8 points**

Un saunier veut créer des marais salants formant un rectangle longé par la mer, d'une superficie de 43,56 ha. Il dispose de 2420 m de grillage pour les clôturer.

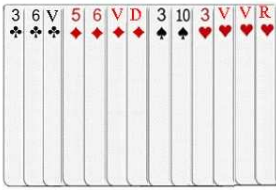
Sachant qu'aucune clôture n'est utilisée le long de la mer, lui est-il possible de clôturer son terrain?

Exercice n°8**Mais où est donc passée Argine?****8 points**

Judith, Rachel et Pallas jouent aux cartes avec deux jeux de 52 cartes. Dans chaque jeu, il y a 4 couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) de 13 cartes chacune. Les 13 cartes sont classées par ordre de valeur comme ci-contre.



Voici les trois « mains » distribuées. La pioche est constituée du reste des cartes non distribuées.



Judith



Rachel



Pallas

1. Si Judith tire une carte en premier dans la pioche, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire un carré? (Un carré est formé de 4 cartes de même valeur et de couleurs différentes, par exemple : 4 as $A♣ A♦ A♠ A♥$ obligatoirement de trèfle, carreau, pique et cœur.)
2. Si Rachel tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une tierce? (Une tierce est formée de 3 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple : $7♣ 8♣ 9♣$.)
3. Si Pallas tire une carte en premier, quelle est la probabilité qu'elle tire une carte lui permettant de faire une quinte? (Une quinte est formée de 5 cartes de la même couleur qui se suivent, par exemple : $9♥ 10♥ V♥ D♥ R♥$.)