Puissance 11 2015.

Instructions aux candidats.

L'usage de la calculatrice est interdit ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

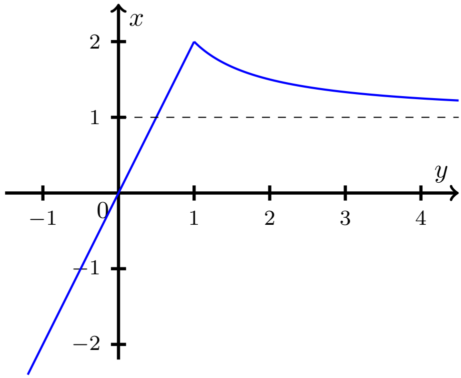
Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Exercice 1 : étude de fonction.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de courbe représentative (Γ) dont la fonction dérivée f' a pour représentation graphique la courbe ci-contre.
On admet que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



a) La courbe (Γ) admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

b) Pour tout $x \in]-\infty \ ; \ 1]$, $f(x) = x^2$.

On suppose dans le c) et d) que (Γ) passe par $\Omega(1 \ ; \ 1)$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

d) $f(2) = \ln 2 + 2$.

Exercice 2 : Fonction définie par deux paramètres.

Soit a et b deux réels strictement positifs fixés et f la fonction définie sur $I = [-a \ ; \ a]$ par $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ de courbe représentative (Γ).

a) Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{b}{2 \times \sqrt{a^2 - x^2}}$.

b) Si $a = 6$ et $b = 3$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 3$.

c) Si $a = b = 1$, alors l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions sur I.

d) Si $a = b$ alors (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = x - 5$.

Exercice 3 : Bases de la géométrie.

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si la droite (D) a pour équation paramétrique $\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2 + t \end{cases}$ avec t réel,

alors le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de (D).

b) Soit $a > 0$. Si ABC est un triangle équilatéral direct de côté a, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{a^2}{2}$.

Pour le c) et d), on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

c) Le nombre $(1+i)^4$ est un nombre réel négatif.

d) L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z+4-3i| = 5$ est un cercle passant par l'origine du repère.

Exercice 4 : Questions de logique.

Agnan, Clotaire, Eudes, Geoffroy et Rufus ne s'entendent pas tous très bien. Pour la fête d'anniversaire qu'organisait le petit Nicolas, ils avaient prévenu :

- Clotaire refuserait de venir si Rufus était présent.
- Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus.
- Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre.

a) Si Clotaire n'est pas venu à la fête, alors Rufus était présent.

b) Si Rufus était absent, alors Clotaire est venu à la fête.

c) Si Agnan est venu, alors Geoffroy et Eudes aussi.

d) Si Eudes et Clotaire sont venus, alors Geoffroy était lui aussi présent.

Exercice 5 : Petite démonstration.

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ de courbe représentative (Γ) et $I = \left]\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

a) Pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2x(1-x)}{(1-2x)^2}$.

b) (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = -x + 5$.

c) Si $x \in I$, la fonction $k\ :\ x \longmapsto \ln(f(x))$ admet comme dérivée la fonction $k'\ :\ x \longmapsto \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{2x-1}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$.

Afin d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) on effectue le raisonnement suivant :

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite démontrer la relation « $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ».

Si $x \in I$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur I.

Supposons que la relation soit vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{k+1} - u_k > 0$.

Par définition de la suite (u_n) nous avons $u_{k+2} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f strictement croissante sur I ; donc si $u_{k+1} > u_k$ alors nous pouvons en déduire que $u_{k+2} = f(u_{k+1}) > u_{k+1} = f(u_k)$ soit $u_{k+2} > u_{k+1}$ ce qui nous permet de conclure que la relation est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : la relation est héréditaire et, comme la fonction f est strictement croissante sur I, nous pouvons en déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement croissante ».

Ce raisonnement est correct.

Exercice 6 : Calculs de limites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$.

c) Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - x - 1}$. La courbe (Γ) représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin(n) - 2n}{n+1}$ converge vers 0.

Exercice 7 : Calcul intégral.

a) $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3 + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

b) $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{20}$.

c) Soit α un réel strictement positif, $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \alpha - \ln(1+\alpha)$.

d) Soit $L = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On a : $\mathrm{e}^2\left(1 - \mathrm{e}^2\right) \leqslant L \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\left(1 - \mathrm{e}^2\right)$.

Exercice 8 : Fonction exponentielle.

Soit F_1 et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$F_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{\mathrm{e}^{-x}+2}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction F_1 et par (x_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = g\left(x_n\right)$.

a) L'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution α avec $0 < a < 1$.

Dans les questions b), c) et d), on admet la convergence de la suite (x_n).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = \alpha$.

c) Si $a \in \mathbb{R}$, alors la tangente à (C) en $x = a$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $g(a)$.

On donne le programme Prog ci-contre :

d) Pour $n = 5$, Prog affiche 0,312 5 et 0,375, nous pouvons en déduire que $0{,}312\,5 < \alpha < 0{,}375$.

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  F_A EST_DU_TYPE NOMBRE
  F_B EST_DU_TYPE NOMBRE
  F_I EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
  A PREND_LA_VALEUR 0
  B PREND_LA_VALEUR 1
  I PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
  F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
  F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
  F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
  TANT QUE (abs(A − B) > 0,1) FAIRE
    DÉBUT TANT QUE
    SI (F_A * F_I > 0) ALORS
    DEBUT_SI
    A PREND_LA_VALEUR I
    F_A PREND_LA_VALEUR F_1(A)
    I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
    F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
    FIN_SI
    SINON
      DÉBUT_SINON
      B PREND_LA_VALEUR I
      F_B PREND_LA_VALEUR F_1(B)
      I PREND_LA_VALEUR (A + B)/2
      F_I PREND_LA_VALEUR F_1(I)
      FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER A
  AFFICHER B
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 9 : Fonction exponentielle et logarithme.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{x}}$, g la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1) \times \ln(x-1)$ et φ la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$.

a) $g'(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

b) $\varphi'(x) = \dfrac{g\left(x^2\right)}{x^2}$.

c) g admet un minimum en $x = \mathrm{e} + 1$.

On admet qu'il existe une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]\mathrm{e} + 1\ ;\ +\infty[$.

d) $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$.

Exercice 10 : Suite et trigonométrie.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in N$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)$.

a) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} > u_n$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$.

c) La suite (u_n) est monotone.

d) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

Exercice 11 : Suite de nombres complexes.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et on considère la suite (z_n) de nombres complexes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 2 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$

On pose A_n le point d'affixe z_n et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par $u_n = |z_n|$.

a) La suite (u_n) est géométrique.

b) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

c) À partir du rang $n = 4$, le point A_n appartient au disque de centre O et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$.

d) Pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle.

Exercice 12 : Géométrie et complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On définit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2i$ et T la transformation complexe du plan qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-2i}{z}$.

a) L'image du point d'affixe $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ par la transformation T est le point d'affixe $1 + 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) L'ensemble des points M du plan complexe tels que $OM' = 1$ représente la médiatrice du segment $[OB]$.

c) M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1 si et seulement si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

d) z' est un nombre complexe imaginaire pur si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre $[OB]$.

Exercice 13 : Variables aléatoires réelles : Cours - Calculs.

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

a) Pour tout entier naturel n, on a : $P(X > n) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $P_{X>n}(X > n+1) = P(X < 1)$.

Soit $\sigma > 0$, Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(9\ ;\ \sigma^2\right)$ et Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y-9}{\sigma}$.

c) Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

d) $P(7 \leqslant Y \leqslant 11) = 2P\left(0 \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right)$.

Exercice 14 : Probabilités conditionnelles.

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.

S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut $\dfrac{1}{9}$, tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$.

S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante ; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$.

On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

a) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de $\frac{1}{9}$.

b) La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de $\frac{25}{81}$.

c) Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de $\frac{7}{9}$.

On note p_n (n étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'événement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n-ième représentation ».

d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad p_{n+1} = \dfrac{2 - p_n}{9}$.

Exercice 15 : Logique et géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et m et p sont deux réels.

On définit le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x - y + 2z - 3 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A de coordonnées $(2\ ;\ p\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Il existe au moins un réel m tel que (Δ) soit parallèle à (P).

b) Si $m = 1$, alors il existe au moins un réel p tel que $(\Delta) \cap (P) = \emptyset$.

c) Si $m \neq 1$, alors pour tout réel p, $(\Delta) \cap (P) \neq \emptyset$.

d) Si $p = 1$, alors pour tout réel m, $(\Delta) \cap (P) = \{\mathrm{A}\}$.

Exercice 16 : Orthogonalité dans l'espace.

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$.

Le point O est le centre du carré $ABCD$, J est le milieu du segment $[SO]$, F est le milieu du segment $[BC]$ et K est le point défini par $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

a) $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.

b) B, K et J sont alignés.

c) Les plans (BJC) et (SAD) sont sécants suivant une droite (Δ) orthogonale à la droite (SF).

Pour le d) on suppose que $BD = SO$ et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

d) La droite (KJ) coupe le plan (P) d'équation cartésienne $2x + 3y - z + 4 = 0$ au point Ω de coordonnées $(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$.