Puissance 11 2014.

I Instructions aux candidats.

L'usage de la calculatrice est interdit ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Exercice n° 1 : Bases en Analyse.

Les questions sont indépendantes.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ est $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

Soit f une fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d) La suite (u_n) converge vers 0.

Exercice n° 2 : Bases en Géométrie.

Les questions sont indépendantes.
Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives

$$(P) : 2x + y + z = 2 \quad \text{et} \quad (Q) : x + y - z = 0.$$

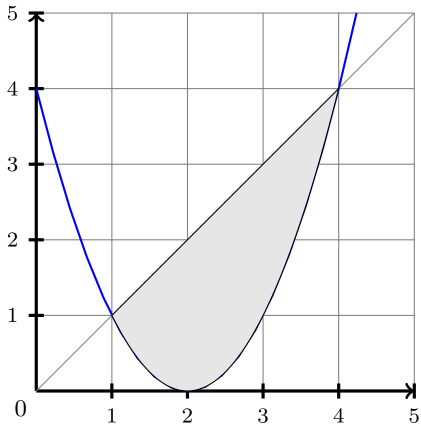
a) L'intersection des plans (P) et (Q) a pour équation $x + 2z = 2$.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b) (D) est perpendiculaire au plan (R) d'équation $x - y + 2z = 0$.

c) Sur le graphique ci-dessous, nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto (x-2)^2$.

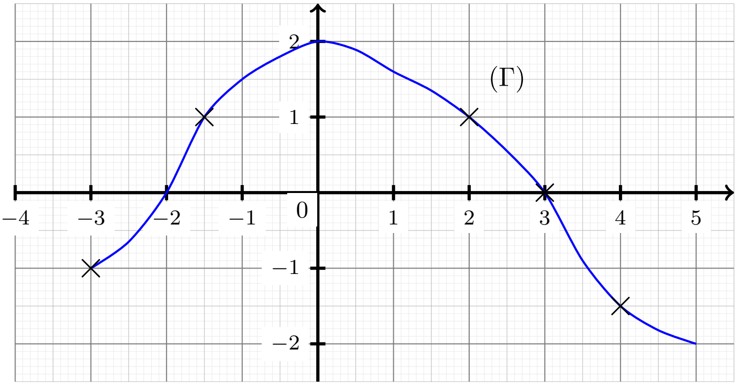
L'aire A du domaine hachuré est égale à $A = \dfrac{9}{2}$ unités d'aire.



d) La courbe représentative de la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 1}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$.

Exercice n° 3 : Lecture graphique.

f est une fonction définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 5]$ de courbe représentative (C). On donne ci-dessous la courbe (Γ) représentative de sa fonction dérivée f'.



a) (C) admet une tangente horizontale en $x = 0$.

b) f admet un minimum relatif en $x = -2$.

c) La fonction f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$.

d) Les tangentes à (C) aux points d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.

Exercice n° 4 : Suite définie par un algorithme.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) où u_n est le réel affiché par l'algorithme ci-contre lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

```
VARIABLES
   u EST DU TYPE NOMBRE
   n EST DU TYPE NOMBRE
   k EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
   LIRE n
   u PREND LA VALEUR 2
   k PREND LA VALEUR 0
TANT OUE (k < n) FAIRE
     DEBUT TANT OUE
     k PREND LA VALEUR k + 1
     u PREND LA VALEUR u + 2 ⋆ (k − 1) + 1
     FIN TANT OUE
AFFICHER u
FIN ALGORITHME
```

a) $u_3 = 11$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

c) La suite (u_n) est strictement croissante.

d) Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2$.

Exercice n° 5 : Bases sur les complexes.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ et $z_2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a) $z_1^2 = 8\sqrt{3} + 8i$.

b) $|z_2| = \sqrt{2}$.

c) $\arg\left(z_1^2\right) = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.

d) $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.

Exercice n° 6 : Bases de logique.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. x et y sont deux nombres réels et z est le nombre complexe $x+iy$.

a) La négation de la proposition : « $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ » est la proposition « $x < 0$ et $y < 0$ ».

b) Si $x = y$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π

c) La réciproque de la proposition précédente est vraie.

d) On suppose $z \neq 0$. Si $z = \dfrac{1}{z}$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

Exercice n° 7 : Calculs de limites.

a) La fonction $x \longmapsto x \times \sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+x} = 1$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x+3x}{x+1} = 0$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 1$.

Exercice n° 8 : Calculs d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

b) La fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = 1 + \dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{2}$ est une primitive de f.

c) $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1+t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice n° 9 : Transformation complexe.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = (1+i)z + 1.$$

a) L'image, par f, du point B d'affixe 2 est le point C d'affixe $3+2i$.

b) Le point A d'affixe i est le seul point invariant par f.

c) L'image, par f, de l'axe des réels est la droite (BC).

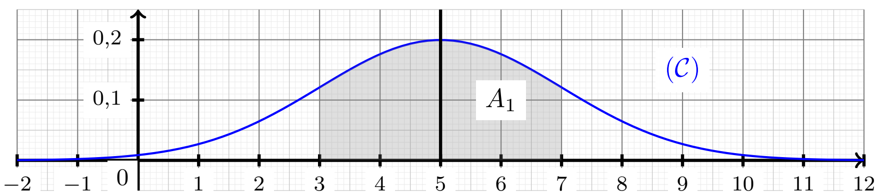
d) Soit D le point d'affixe 1. Pour tout point M distinct de A et de D, le triangle DMM' est isocèle en M.

Exercice n° 10 : Loi normale.

Dans tout l'exercice, on suppose T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ avec μ et σ deux entiers naturels.

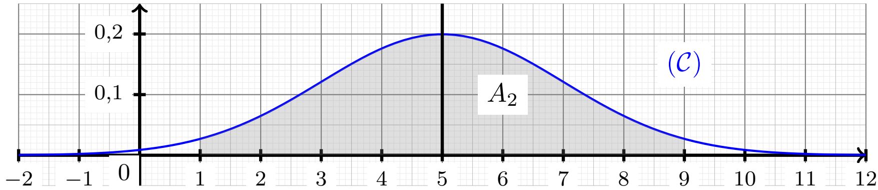
La densité de probabilité de cette loi, notée f, est représentée ci-dessous par la courbe $(\mathcal{C})$.

On suppose que $(\mathcal{C})$ admet la droite $x = 5$ comme axe de symétrie et que l'aire du domaine A_1 (représenté en gris) est environ égale à 0,68.

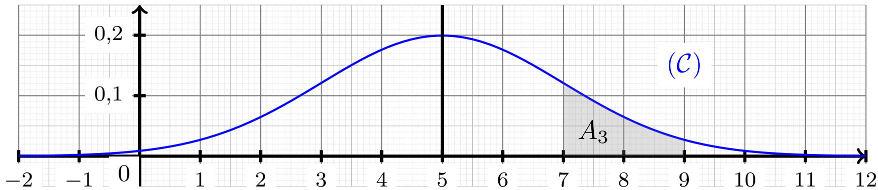


a) $\mu = 5$ et $\sigma = 4$.

b) L'aire du domaine A_2, représenté ci-dessous, est environ égale à 0,8.



c) L'aire du domaine A_3 représenté ci-dessous, est environ égale à 0,135.



On admet, dans cette question, que $P(T \in [\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$.

d) $P(T \leqslant 9) \approx 0{,}975$.

Exercice n° 11 : Nombres complexes et géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

À chaque point M d'affixe $z \neq 0$, on associe l'unique point M' d'affixe z' tel que,

$$z' = \left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)^2.$$

a) En posant $z = x + iy$,avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et $z' = x' + iy'$, on a : $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b) M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = x$ privée de O.

c) M' est un point du cercle trigonométrique.

d) M' a pour affixe -1 si et seulement si $z = i$ ou $z = -i$.

Exercice n° 12 : Étude d'une fonction logarithme.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

de courbe représentative $(\mathcal{C})$.

a) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $(\mathcal{C})$ admet une unique asymptote verticale.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

d) Il existe deux points de $(\mathcal{C})$ ayant une tangente à $(\mathcal{C})$ parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = x - \ln 7$.

Exercice n° 13 : Étude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.

On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a) Pour tout réel x, on a : $f'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 2)$.

b) Pour tout réel x, on a : $f(x) > \dfrac{3}{2}$.

c) (C_f) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n° 14 : Probabilités conditionnelles.

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,7.
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,5.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

a• G_n l'événement : « le joueur gagne la n-ième partie » ;

b• p_n la probabilité de l'événement G_n.

a) $p_2 = 0{,}54$.

b) Le joueur gagne la deuxième partie. La probabilité qu'il ait perdu la première est 0,6.

c) Pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{2}$.

Pour le d), on donne l'algorithme ci-dessous :

```
Variables
    n EST DU TYPE NOMBRE
    p EST DU TYPE NOMBRE
    i EST DU TYPE NOMBRE
DÉBUT ALGORITHME
    LIRE n
    p PREND LA VALEUR 0,2
    POUR i ALLANT DE 2 À n
        DÉBUT POUR
        p PREND LA VALEUR 0,2 ⋆ p + 0,5
        FIN POUR
    AFFICHER p
FIN ALGORITHME
```

d) Si on teste le programme pour $n = 5$ alors cet algorithme restitue la probabilité que le joueur gagne la cinquième partie.

Exercice n° 15 : Différentes lois de probabilités.

Les quatre questions sont indépendantes.

a) Soit $t > 0$. Si X suit une loi uniforme sur $[0\ ;\ t]$ telle que $p(X < 5) = 0{,}4$ alors $t = 20$.

b) $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ 0{,}3)$ d'espérance 12, alors $n = 40$.

c) Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, alors $\mathrm{E}(X) = 5\,000$.

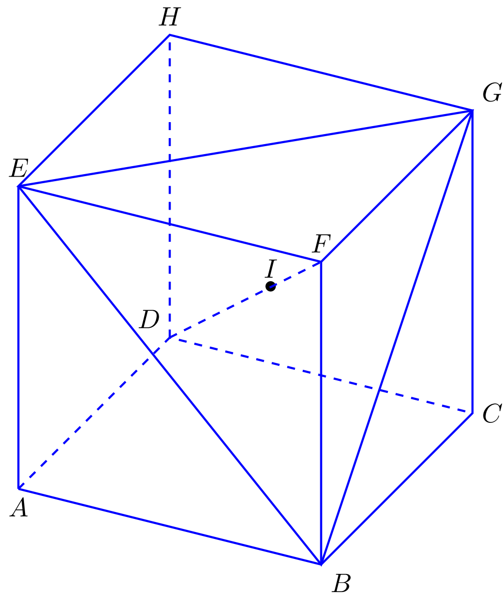
d) On considère A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Si $P_B(A) = P_A(B)$, alors $p(A) = p(B)$.

Exercice n° 16 : Repérage dans un cube.

Dans le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, on considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On rappelle que :

- Le plan médiateur d'un segment est le plan passant par le milieu de ce segment tout en lui étant perpendiculaire.
- Si M est un point de l'espace et (P) un plan de l'espace, on appelle distance du point M au plan (P) la plus petite distance d entre le point M et un point H du plan (P).



a) (GDF) est le plan médiateur du segment $[EB]$.

b) Le plan (BEG) a pour équation : $x - y + z = 1$.

c) $I\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (BEG).

d) La distance du point D au plan (BEG) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.