Puissance 11 2013.

Instructions aux candidats.

L'usage de la calculatrice est interdit ainsi que tout document ou formulaire.

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.

Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).

Toute réponse exacte rapporte un point.

Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.

L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Exercice n° 1 : Bases en analyse.

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a) La dérivée de $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

Réponse : faux.

Si $f(x) = x\mathrm{e}^x$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x - 1}{x} = +\infty$.

Réponse : faux.

$\frac{\ln x - 1}{x} = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

Or : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = 0$.

c) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

Réponse : faux.

L'implication est fausse puisque, par exemple, la fonction exponentielle égale sa dérivée et n'est pas nulle.

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.

d) A et B sont incompatibles.

Réponse : vrai.

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}7 = 0$.

Exercice n° 2 : Bases en Géométrie.

Pour le a) et b), on se place dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$. Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Si $z = -6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Réponse : faux.

L'écriture proposée pour z n'est pas la forme trigonométrique, puisque, -6 étant négatif, ce n'est pa le module de z qui est mis en facteur. L'écriture trigonométrique de z est :

$$\begin{aligned} z &= -6\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 6\mathrm{e}^{-i\pi}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 6\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc : $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

b) Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M' un point d'affixe $z' = -\overline{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à O.

Réponse : faux.

Dire que deux points du plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ sont symétrique par rapport à O c'est dire que leurs abscisses d'une part et leurs ordonnées d'autre part sont opposées.
Or

$$\begin{aligned} z' &= -\overline{z} \\ &= -\overline{x+ity} \\ &= -(x-iy) \\ &= -x+iy \end{aligned}$$

et, par hypothèse y est non nul, donc les points ne sont pas symétriques par rapport à O.
Les points M et M' sont symétriques par rapport à $(O,\vec{v})$.

Pour le c) et le d), on se place dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.
On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x+6y-10z+3=0$ et $-6x-9y+15z-8=0$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+1 \\ y &=& -t-3 \\ z &=& 5t-1 \end{array}\right.$ où t désigne un nombre réel.

c) (P_1) et (P_2) sont sécants.

Réponse : faux.

Deux plans de l'espace sont sécants si et seulement si deux vecteurs qui leurs sont normaux sont non colinéaires.

D'après leurs équation cartésiennes, $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$ sont respectivement normaux à (P_1) et (P_2).
Or nous remarquons que : $-\frac{3}{2}u\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, et donc, les vecteurs sont colinéaires et les plans sont parallèles.
Comme de plus : $-\frac{3}{2} \times 3 \neq -8$, nous pouvons affirmer que (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles.

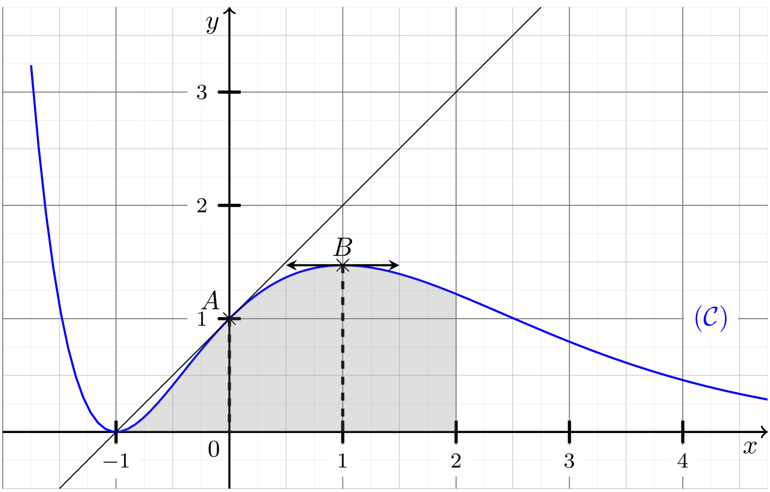
d) Le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ -5)$ appartient à la droite (d).

Réponse : faux.

$A \in (d)$ si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 2 & = & 2t_0 + 1 \\ 3 & = & -t_0 - 3 \\ -5 & = & 5t_0 - 1 \end{cases}$
Nécessairement d'après la première équation $t_0 = \frac{1}{2}$.
Vérifions si c'est cette valeur de t convient en testant la seconde égalité : $3 \neq -\frac{1}{2} - 3$.
Donc $A \notin (d)$.

Exercice n° 3 : Lecture graphique.

On considère la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.



a) $f'(0) = 1$.

Réponse : vrai.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
Nous lisons directement sur le graphique que ce coefficient directeur est 1.
Il est possible de le vérifier par le calcul.
Notons $C(1{,}2)$. La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est la droite (AC) dont le coefficient directeur est

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-1}{1-0} = 2$$

b) $f'(1) = 1{,}5$.

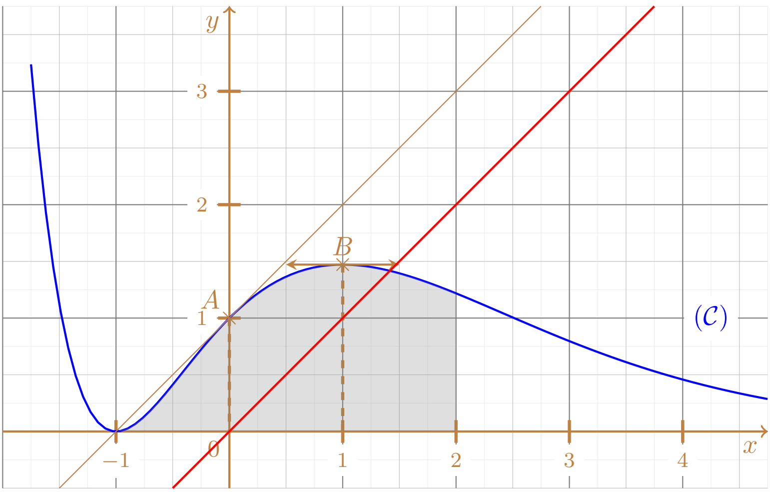
Réponse : faux.

La tangente au point d'abscisse 1 est horizontale son coefficient directeur est donc nul : $f'(1) = 0$.

c) L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-1{,}5\ ;\ 4]$.

Réponse : vrai.

Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$).

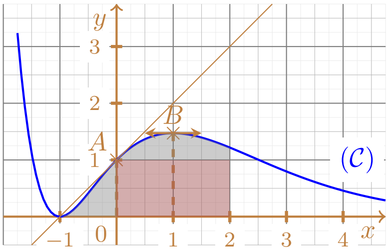


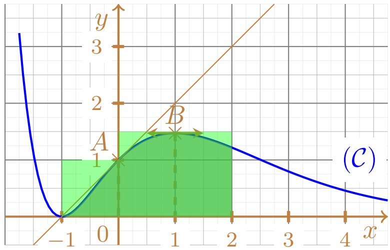
Il n'y a visiblement qu'un seul point d'intersection et son abscisse est d'environ 1,3.

d) $2 \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.

Réponse : vrai.

Comme la fonction f est visiblement positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire comprise entre $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$. Autrement dit l'aire grisée sur la figure.

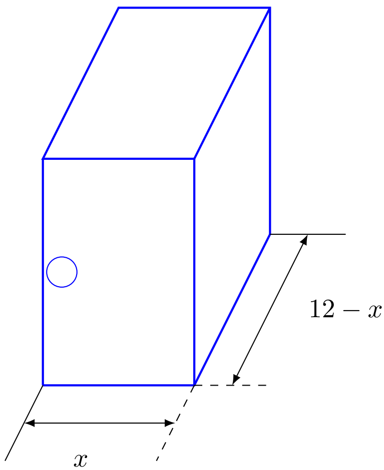




La plus grande aire mesure 4 et la plus petite 2. Nous retrouvons bien l'encadrement proposé.

Exercice n° 4 : Volume d'un parallélépipède rectangle.

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12-x$ et la hauteur est égale à la profondeur. On suppose $x \in [0\ ;\ 12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).

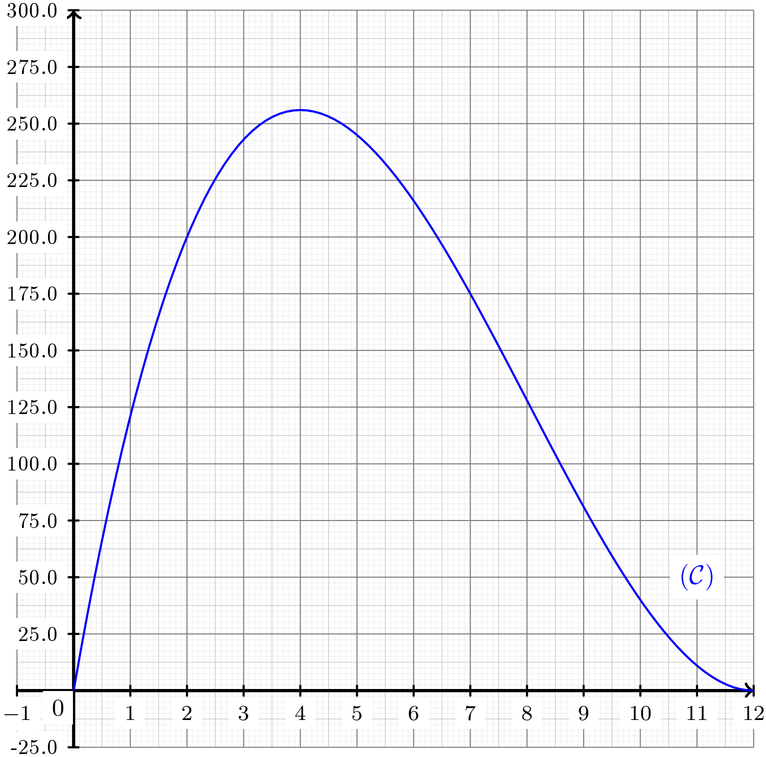


a) Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = \left(-12x + x^2\right)(x - 12)$.

Réponse : vrai.

Volume d'un pavé droit : $V(c) = x \times (12 - x) \times (12 - x) = (12x - x^2)(12 - x) = \left[-(12x - x^2)\right] \times \left[-(12 - x)\right] = (-12x + x^2)(-12 + x)$.

On pose f la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$ de courbe représentative (C) ci-dessous.



b) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 12]$, $f'(x) > 0$.

Réponse : faux.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f semble admettre une tangente horizontale en 4, ce qui contredit le fait que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0{,}12]$.
Nous pouvons également remarquer que f décroissant sur $[4{,}12]$ sa dérivée sera alors négative.

c) $V(x) = 2f(x)$.

Réponse : faux.

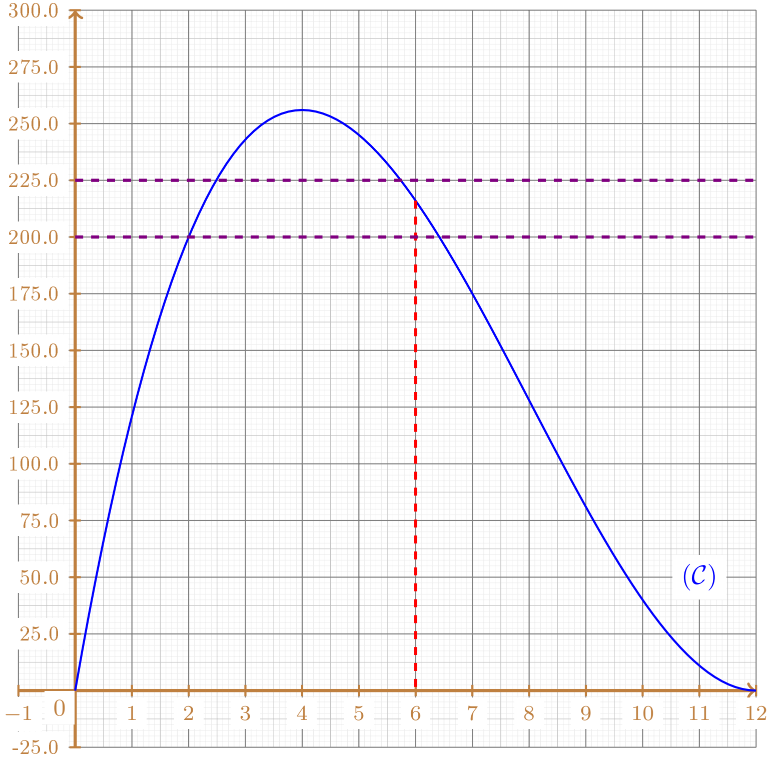
Soit $x \in [0{,}12]$.

$$V(x) = x(12-x)^2 = x(144 - 24x + x^2) = x^3 - 24x^2 + 144x = f(x).$$

d) Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.

Réponse : vrai.

Si le parallélépipède rectangle est un cube alors : $x = 12 - x$ et donc $x = 6$. Puisque f égale V la représentation graphique montre que $V(6)$ est bien compris entre 200 et 225.



Exercice n° 5 : Utilisation d'une suite dans un algorithme.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - n) - 1$.

On donne l'algorithme suivant :

Entrée	n est un entier naturel.
Initialisation	u prend la valeur 1 ; i prend la valeur 0.
Traitement	Tant que $i < n$ u prend la valeur $\frac{1}{2}(u-i)-1$ i prend la valeur $i+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher u.

a) Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	$-1/2$	1
3	$-7/4$	2
3	$-23/4$	3

Réponse : faux.

Initialisation : $i = 0$ et $u = 1$.
Puis : $u = \frac{1}{2}(1-0) - 1 = -\frac{1}{2}$ et $i = 1$.
Puis : $u = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) - 1 = -\frac{7}{4}$ et $i = 2$.
Puis : $u = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{4} - 2\right) - 1 = -\frac{23}{8}$ et $i = 3$.

b) Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.

Réponse : vrai.

Si $n = 3$ alors l'agorithme calcule successivement :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = -\frac{1}{2}$$
$$u_2 = -\frac{7}{4}$$
$$u_3 = -\frac{23}{8}$$

puis s'arrête et affiche donc u_3.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Réponse : vrai.

(u_n) est définie par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \ltimes$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) + 1$.
Donc

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} + n + 1}{u_n + n} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{2}(u_n - 1) - 1\right] + n + 1}{u_n + n} \\
&= \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n}{u_n + n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Comme de plus $v_0 = u_0 + 0 = 1$, nous pouvons affirmer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n$.

Réponse : faux.

Puisque la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times v_0 = \frac{1}{2^n}$$

Comme $v_n = u_n + n$,

$$u_n = v_n - n = \frac{1}{2^n} - n$$

Exercice n° 6 : Utilisation d'un algorithme avec les nombres complexes.

On se place dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	θ,a,b,a',b' sont des nombres réels.
Traitement	a' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$. a' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.
Sortie	Afficher a'. Afficher b'.

Pour le a) et le b) on suppose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$.

a) $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Réponse : faux.

Les deux premières lignes de traitement de l'algorithme donnent le tableau de fonctionnement :

	θ	a	b	a'	b'
Initialisation	$\frac{\pi}{3}$	1	1		
Ligne 1	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	
Ligne 2	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$\frac{1}{2} - 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	

b) $b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Réponse : vrai.

Le tableau de fonctionnement de l'algorithme est le suivant :

	θ	a	b	a'	b'
Initialisation	$\frac{\pi}{3}$	1	1		
Ligne 1	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	
Ligne 2	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$\frac{1}{2} - 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	
Ligne 3	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$1 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Ligne 4	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a+ib$ et M' le point d'affixe $z' = a' + ib'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c) Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'| = \sqrt{2}$.

Réponse : vrai.

En sortie d'algorithme :

- $a' = a\cos\theta - b\sin\theta$. Donc si $a = b = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ alors $a' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.
- $b' = a\sin\theta + b\cos\theta$. Donc si $a = b = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ alors $b' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Nous en déduisons : $|z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$.

d) Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$,$z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$.

Réponse : vrai.

$$\begin{aligned}
z' &= a' + ib' \\
&= [a\cos\theta - b\sin\theta] + i[a\sin\theta + b\cos\theta] \\
&= a[\cos\theta + i\sin\theta] + ib[i\sin\theta + \cos\theta] \\
&= a\mathrm{e}^{i\theta} + ib\mathrm{e}^{i\theta} \\
&= (a+ib)\mathrm{e}^{i\theta} \\
&= \mathrm{e}^{i\theta} z
\end{aligned}$$

Exercice n° 7 : Bases de logique.

Pour le a) et le b) on suppose que z est un nombre complexe et Γ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

a) $z \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ et $Im(z) \neq 0$.

Réponse : faux.

Pour que $z \neq 0$ il suffit que $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ ou $Im(z) \neq 0$?

b) La contraposée de la proposition « si $z \in \Gamma$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ » est « si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Réponse : faux.

La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\mathrm{non}(B) \Rightarrow \mathrm{non}(A)$.
Autrement dit la contraposée de la proposition « si $z \in \Gamma$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ » est « si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ alors $z \notin \Gamma$ ».

Pour le c) et le d) on suppose que f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 5]$.

c) Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

Réponse : faux.

Le raisonnement est incorrect sans un argument de continuité de la fonction f.

d) Si f admet une primitive sur $I = [-3\ ;\ 5]$ alors f est continue sur I.

Réponse : faux.

C'est la réciproque qui est vraie : si f est continue sur I alors f admet une primitive sur $I = [-3\ ;\ 5]$.

Exercice n° 8 : Calculs de limites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$.

Réponse : faux.

Résultat de cours : $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

Réponse : faux.

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \\ \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right.$ donc $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

c) Si, pour tout réel x non nul, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Réponse : faux.

Supposons que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. D'après les résultats d'encadrements des limites : $0 \leq \lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 1$. Il n'est pas possible de préciser davantage l'éventuelle limite de f.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x) - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}} = 1$.

Réponse : faux.

Soit $x < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}-1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x-\frac{\pi}{2}} \geq \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \geq 0\end{aligned}$$

car $x - \frac{\pi}{2} < 0$

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x-\frac{\pi}{2}} = 0$ donc, d'après les théorèmes d'encadrement des limites, $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 0$.

Exercice n° 9 : Calculs d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4 + 2\sqrt{2}$.

Réponse : faux.

Une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $F(x) = 2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(4) - F(2) \\ &= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln 2$.

Réponse : vrai.

Nous reconnaissons dans $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ une dérivée logarithmique.
Une primitive de f est $F(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(1^2+1) - \ln(0^2+1) \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

c) La fonction $x \longmapsto \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x - 2$ est une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$.

Réponse : vrai.

La fonction F définie par $F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables.
Notons : $u(x) = x^2 - 2x + 2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Alors : $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
La dérivée de F est successivement égale à

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x \\ &= \left[2x - 2 + x^2 - 2x + 2\right] \mathrm{e}^x \\ &= x^2\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 2.$

Réponse : faux.

La fonction F définie par $F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^x - 2$ est une primitive de $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$. Nous en déduisons la valeur de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 2 &= F(1) - F(0) \\ &= [(1^2 - 2\times 1 + 2)\mathrm{e}^1] - [(0^2 - 2\times 0 + 2)\mathrm{e}^0] \\ &= \mathrm{e} - 2 \end{aligned}$$

Exercice n° 10 : Notions de bases sur les nombres complexes.

On se place dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère A le point d'affixe $z_A = -2i$, B le point d'affixe $z_B = -2$ et E le point d'affixe $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$.

a) L'écriture trigonométrique de $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$ est $4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

Réponse : vrai.

$$\begin{aligned} 4e^{i\frac{\pi}{3}} &= 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 4\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= 2 + 2i\sqrt{3} \\ &= z_E \end{aligned}$$

b) E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

Réponse : faux.

E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2$ si et seulement si $|z_E - z_O| = 2$.
Or

$$\begin{aligned} |z_E - z_O| &= |2 + 2i\sqrt{3}| \\ &= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

donc E est sur le cercle de centre O et de rayon 4.

c) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2i| = |2 + z|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Réponse : vrai.

Nous utiliserons le fait que la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

$$\begin{aligned} AM &= |z_M - z_A| \\ &= |z - (-2i)| \\ &= |z + 2i| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BM &= |z_M - z_B| \\ &= |z - (-2)| \\ &= |z + 2| \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $AM = BM$ si et seulement si $|z + 2i| = |z + 2|$.

d) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z\overline{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

Réponse : faux.

$$2z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les points M forment donc le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n° 11 : Utilisation des nombres complexes en géométrie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1 + \dfrac{i}{z}$.

a) L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1+i$ est le point A' d'affixe $z_{A'} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

Réponse : vrai.

$$\begin{aligned} z'_A &= 1 + \frac{i}{1+i} \\ &= 1 + \frac{i(1-i)}{1^2+1^2} \\ &= 1 + i\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} + i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on pose $z = x + iy$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z' = x' + iy'$ avec x',y' réels.

b) $\mathrm{Re}(z') = x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

Réponse : vrai.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \frac{i}{x+iy} \\ &= 1 + \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= 1 + i\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

c) $\mathrm{Im}(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Réponse : faux.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \frac{i}{x+iy} \\ &= 1 + \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= 1 + i\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

d) L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $A\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$, privé du point O.

Réponse : vrai.

z' est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z') = 0$.
Or

$$\mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

donc il s'agit du cercle de centre $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de O $(z \neq 0)$.

Exercice n° 12 : Étude d'une fonction logarithme.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$.
On note D l'ensemble de définition de f.

a) $1 - x^2 > 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.

Réponse : vrai.

Étudions le signe de la fonction polynomiale $g(x) = -x^2+1 = (1-x)(1+x)$. g est de degré 2 donc du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines. Nous en déduisons le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi : $g(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-1,1[$.

b) $D = [-1\ ;\ 1]$.

Réponse : faux.

f n'est pas définie en 1 ou -1 car la fonction logarithme népérien n'est pas définie en 0.

c) La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Réponse : faux.

f est effectivement dérivable sur $]-1{,}1[$ et sa dérivée est donné, pour tout $x \in]-1{,}1[$, par la formule de la dérivée logarithmique

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

d) L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{\mathrm{e}-1}$ et $x = -\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

Réponse : faux.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \ln(1-x^2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exp\left[\ln(1-x^2)\right] = \exp(1) \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 = \mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 - \mathrm{e} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e} \approx 2{,}7$ donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

Exercice n° 13 : Étude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Réponse : faux.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^2}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x^2}=1\end{array}\right.$ donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Réponse : vrai.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$
$$f(x)=\frac{\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Or $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1\end{array}\right.$ donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

c) La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f'définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1\right)\right)^2}$.

Réponse : vrai.

f est quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2\mathrm{e}^{2x}(x^2+1)-\mathrm{e}^{2x}\times 2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{2x}\left[x^2-x+1\right]}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{x^2-x+1}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2(x^2+1)^2}\\&=\frac{x^2-x+1}{\left(\mathrm{e}^{-x}(x^2+1)\right)^2}\end{aligned}$$

d) f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Réponse : faux.

Nous remarquons, au choix, que la fonction dérivée est de signe constant ou que la fonction est décroissant sur $]0,+\infty[$ et admet $+\infty$ pour limite en ∞.

Exercice n° 14 : Bases en probabilités.

On considère, dans a), deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a) $P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_F(E)$.

Réponse : faux.

Considérons $\Omega = \{a,b,c,d\}$, $E = \{a,b,c\}$, $F = \{c,d\}$, les issues étant toutes équiprobables.
$P_{\overline{F}}(E) = 1$ et $P_F(E) = \frac{1}{2}$ donc $P_{\overline{F}}(E) \neq 1 - P_F(E)$.

Pour les questions b), c) et d), nous utiliserons les hypothèses suivantes : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.

Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition.

Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition.

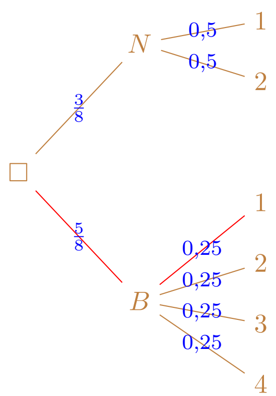
On considère les évènements suivants :

G : « Le joueur obtient le numéro 1 » ; B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b) $P(B \cap G) = \dfrac{5}{32}$.

Réponse : vrai.

Représentons la situation par un arbre probabiliste (en supposant que le tirage des boules se fait de façon équiprobable).

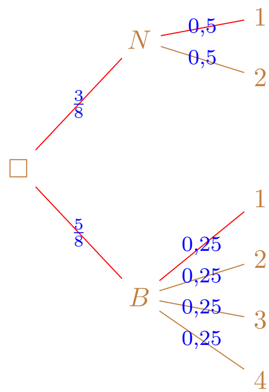


$$P(B \cap G) = P_B(G) \times P(G) = 0{,}25 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32}$$

c) $P(G) = \dfrac{13}{32}$.

Réponse : faux.

Représentons la situation par un arbre probabiliste (en supposant que le tirage des boules se fait de façon équiprobable).



$$P(G) = P_B(G) \times P(B) + P_{\overline{B}}(G) \times P(\overline{B}) = 0{,}25 \times \frac{5}{8} + 0{,}5 \times \frac{3}{8} = \frac{11}{32}$$

d) $P_G(B) = \dfrac{5}{11}$.

Réponse : vrai.

$$P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{frac532}{\frac{11}{32}} = \frac{5}{11}$$

Exercice n° 15 : Différentes lois de probabilités.

a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0 \ ; \ 5]$.
$P\left(1 \leqslant X \leqslant \dfrac{5}{2}\right) = 0{,}4$.

Réponse : faux.

La fonction de densité de la loi uniforme sur $[0{,}5]$ est définie pour tout $x \in [0{,}5]$ par

$$f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5}$$

Donc

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x$$

$F(x) = \frac{1}{5}x$ est une primitive de f donc

$$\begin{aligned} P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) &= F\left(\frac{5}{2}\right) - F(1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= 0{,}4 \end{aligned}$$

b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$.

Réponse : vrai.

La fonction de densité associée à la loi exponentielle de paramètre λ est définie pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Et alors :

$$P(Y \leq a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} P(Y > c) &= 1 - P(\overline{Y > c}) \\ &= 1 - P(Y \leq c) \end{aligned}$$

Or $F(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$, donc

$$p(Y \leq c) = F(c) - F(0) = -\mathrm{e}^{-\lambda c} + 1$$

D'où $P(Y > c) = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda} + 1\right) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$.

c) Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$.
$P(T \leqslant 10) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Réponse : vrai.

$$p(Y \leq 10) = -\mathrm{e}^{-\lambda 10} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\times 10} = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu \,;\, \sigma^2\right)$ et vérifiant $P(0 \leqslant Z \leqslant 2) = 0{,}75$. La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 \,;\, 1)$.

Réponse : faux.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'effectivement Z suit la loi normale centré réduite.
Du fait de la symétrie de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite par rapport à l'axe des ordonnés :

$$P(0 \leq Z \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 0)$$

Donc

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) = 1{,}5$$

ce qui contredit le fait que P est une probabilité.
Nous avons démontré par l'absurde que nécessairement Z ne suit pas la loi normale centrée réduite.

Exercice n° 16 : Repérage dans l'espace.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x + 2y + 3z - 2 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= -3 - t \end{cases}$

a) Le point $A(-1 \,;\, 3 \,;\, -2)$ appartient à D.

Réponse : vrai.

Procédons par conditions nécessaires et suffisantes.

- Supposons $A \in D$.
  Alors : $-1 = 1 + 2t$ et donc $t = -1$.
- Réciproquement Si $t = -1$ alors $y = 2 - (-1) = 3$, $z = -3 - (-1) = -2$

Donc $A \in D$.

b) Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées $(-3\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

Réponse : vrai.

* Montrons que P et D sont sécants.
  $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal à P.
  $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est une vecteur directeur de D.
  Comme
  $$\vec{n}\cdot\vec{u} = 1\times 2 + 2\times(-1) + 3\times(-1) = -3 \neq 0$$
  nous pouvons affirmer que P et D sont sécants.
* Vérifions que le point d'intersection de P et D est $B(-3{,}4,-1)$.
  B appartient à D puisque le système paramétrique est alors vérifié pour $t = -2$.
  B appartient à P car $-3+2\times 4+3\times(-1)-2=0$.

c) La droite D', de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & -2k+1 \\ z & = & k \end{array}\right.$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

Réponse : faux.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal à P.
$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est une vecteur directeur de D.
Comme
$$\vec{n}\cdot\vec{u} = 1\times 1 + 2\times(-2) + 3\times 1 = 0$$
nous pouvons affirmer que P et D sont parallèles et non pas sécants.

d) Les droites D et D' sont coplanaires.

Réponse

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Ici nous remarquons que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, des vecteurs directeurs respectivement de D et D', ne sont pas colinéaires. D et D' ne sont pas parallèles.
Si $M(x,x,z)$ appartient à D et D' alors nécessairement $\left\{\begin{array}{c} 1+2t=k \\ 2-t=-2k+1 \\ -3-t=k \end{array}\right.$.
Nécessairement $t=-\frac{4}{3}$ et $k=-\frac{5}{3}$.
En remplaçant dans les systèmes d'équations paramétriques par les valeurs de k et de t nous vérifions que les droites sont sécantes au point de coordonnées $\left(-\frac{5}{3},\frac{10}{3},-\frac{5}{3}\right)$.