EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2025

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-8h30-10h30

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux candidats ayant suivi **la spécialité mathématique.**

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 10h30

Une pause de quinze minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte **8 pages** (dont la page de garde).

EXERCICE 1 : Sommes et produits « impairessantes » !

Quelques rappels :

En arithmétique, nous disons qu'un entier naturel n est :

- **pair** lorsque 2 le divise, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $n = 2 \times p$,
- **impair** lorsqu'il n'est pas divisible par 2, c'est-à-dire qu'il existe un entier q tel que $n = 2 \times q + 1$. Ainsi, 7 est un nombre impair car $7 = 2 \times 3 + 1$. Tout entier naturel est alors soit pair, soit impair,
- **premier** lorsqu'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même. Par convention, on considère que 1 n'est pas premier. Par exemple, 2 est un nombre premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 2. En revanche 9 n'est pas premier car il admet pour diviseurs $1, 3$, et 9.

Dans ce sujet, étant donné un entier naturel non nul n, nous allons nous intéresser à :

- **la somme de tous les chiffres composant le nombre n noté $S(n)$**
- **Le produit de tous les chiffres composant le nombre n, noté $P(n)$**

Par exemple, considérons le nombre 42 : nous avons alors $S(42) = 4 + 2 = 6$ et $P(42) = 4 \times 2 = 8$.

Dans ce qui suit, toute réponse doit être soigneusement justifiée. Dans la suite de cet énoncé n un entier naturel non nul.

Parie 1 : préliminaires

1) Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

2) Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

3) Montrer que la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair est un nombre impair.

Partie 2 : Étude de $S(n)$, et de $P(n)$

1) Calculer :
   a) $S(358)$ et $P(358)$.
   b) $S(2025)$ et $P(2025)$.

2) À quelle condition sur n, on a $P(n) = 0$?

3) Trouver un nombre n tel que $S(n) = 13$ et $P(n) = 36$.

4) Donner tous les nombres n à cinq chiffres tels que $P(n) = 7$.

5) À quelle condition sur les chiffres composant n a-t-on $P(n)$ premier ?

6) Soit n un nombre à deux chiffres : le chiffre des dizaines est noté a et le chiffre des unités est noté b.

   a) Dire pourquoi a est non nul. Exprimer n en fonction de a et b à l'aide d'une addition. On pourra penser notamment à ce que représente le chiffre des « dizaines » dans un nombre.

   b) On suppose $P(n) + S(n) = n$. Trouver la valeur de b.

7) Montrer que si n est pair, alors $P(n)$ est pair. La réciproque est-elle vraie : si $P(n)$ est pair, alors n est pair ?

8) En déduire la condition sur n pour que $P(n)$ soit impair.

9)
   a) À quelle condition sur un nombre n à 3 chiffres a-t-on $S(n)$ pair ?

   b) À quelle condition sur un nombre n quelconque a-t-on $S(n)$ pair ?

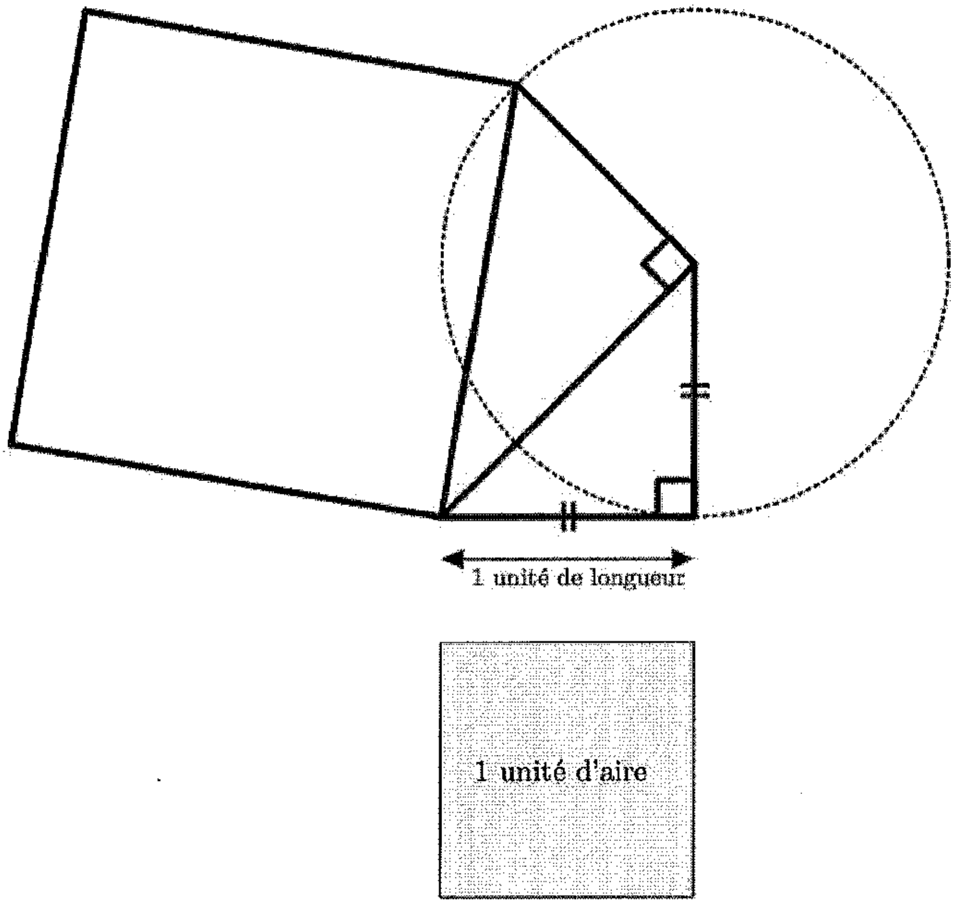
Partie 3 : Algorithmique

10) Que renvoie la **fonction_mystere** suivante écrite en langage Python ? Expliciter la signification des variables en jeu. L'opérateur % entre deux entiers n et m calcule le reste de la division euclidienne de n par m.

```
def fonction_mystere(n):
    """n est une liste de ses chiffres"""
    S=0
    P=1
    for i in range(len(n)):
        S=S+n[i]
        P=P*n[i]
    return S%2==0,P%2==0
```

EXERCICE 2 : : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire a (en unité d'aire)

Partie 1 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire a (en unité d'aire) **dans des cas particuliers**

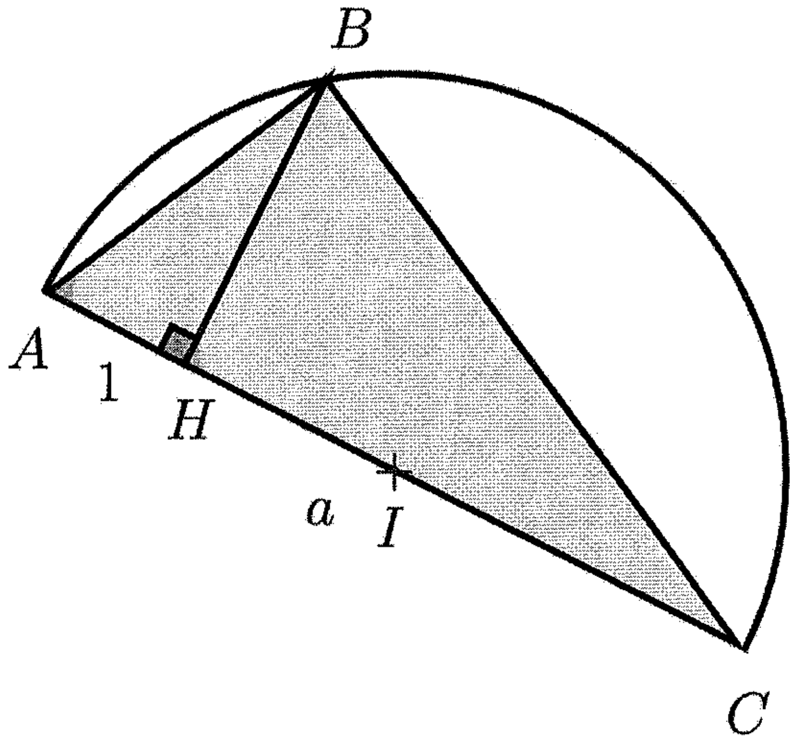


1. Calculer l'aire exacte du carré en unité d'aire.

2. En poursuivant le même algorithme de construction (initié sur le schéma précédent et en construisant deux autres triangles rectangles et dont l'un des côtés de l'angle droit a pour mesure une unité de longueur), réaliser, sur la figure située sur l'annexe 1, un carré d'aire 5.

Parie 2 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire a (en unité d'aire) dans le cas général.

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère un demi-cercle de diamètre [AC] de longueur $1 + a$.
On place le point H du segment [AC] tel que AH=1.
Le point B est à l'intersection de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par H et du demi-cercle de diamètre [AC].



1. Justifier que $BI = \frac{1}{2}(a+1)$.
2. Établir que $HI = \frac{1}{2}(a-1)$.
3. Démontrer que $BH = \sqrt{a}$.
4. Construire la figure dans le cas où $a = 5$ sur l'annexe 2.
5. En déduire un algorithme de construction à la règle et au compas d'un carré d'aire 5 unités. Construire ce carré sur la figure de l'annexe 2.

Parie 3 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire *c* (en unité d'aire) autre méthode.

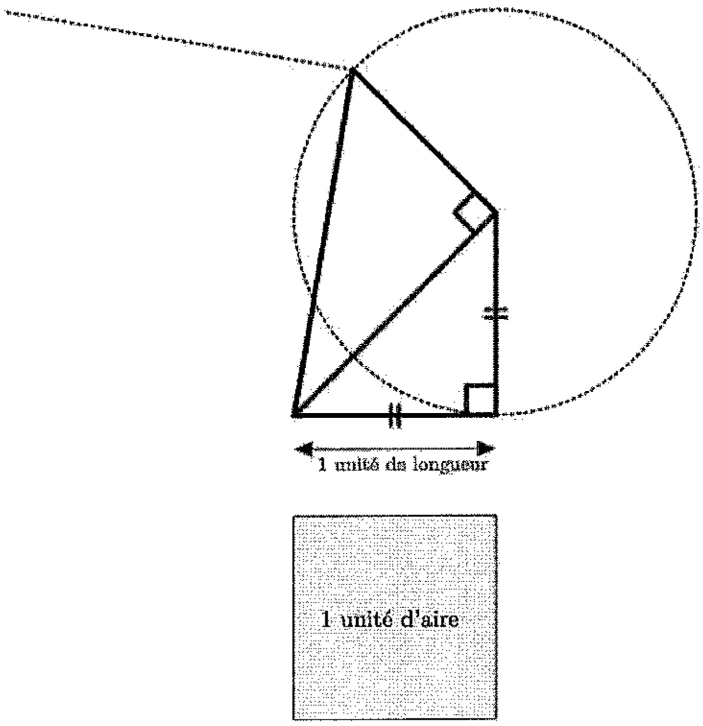
Rappel : un nombre entier est dit premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Soit c un nombre premier strictement supérieur à 2.

1. Démontrer que s'il existe deux entiers naturels a et b tels que $c = b^2 - a^2$, alors nécessairement :
   - a et b sont consécutifs.
   - $a = \frac{c-1}{2}$ et $b = \frac{c+1}{2}$.
2. Vérifier que les nombres a et b sont consécutifs et vérifient $c = b^2 - a^2$.
3. En déduire, à l'aide d'un triangle rectangle, un protocole de construction d'un côté de longueur $\sqrt{c}$, puis en déduire un protocole de construction d'un carré d'aire c.
4. Réaliser une telle construction pour un carré d'aire 13 sur l'annexe 3.

Annexe 1 à rendre avec la copie

Partie 1 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire 5 (en unité d'aire).



Annexe 2 à rendre avec la copie

<u>Partie 2 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire 5 (en unité d'aire).</u>

1 unité de
longueur

Annexe 3 à rendre avec la copie

Partie 3 : construction à la règle et au compas d'un carré d'aire 13 (en unité d'aire).

1 unité de longueur