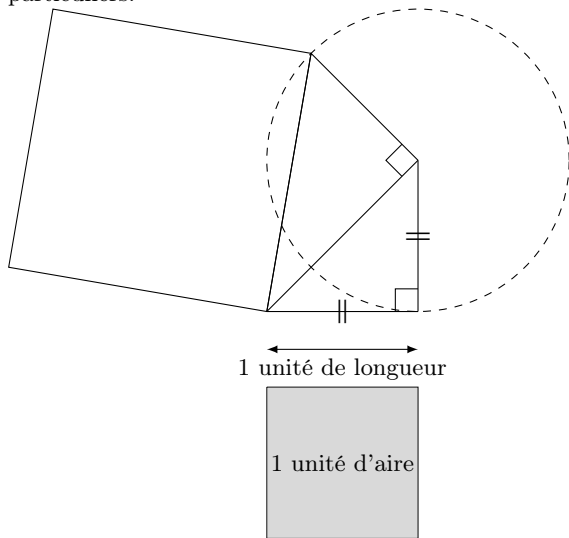


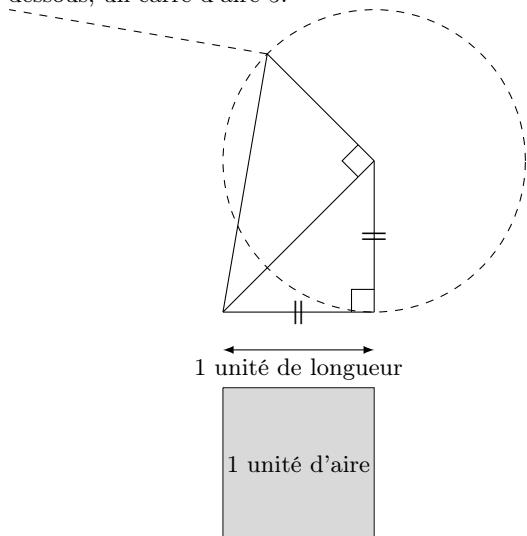
# Olympiades 2025 Réunion. Exercice commun.

## Construction à la règle et au compas d'un carré d'aire $a$ (en unité d'aire).

1. Construction à la règle et au compas d'un carré d'aire  $a$  (en unité d'aire) dans des cas particuliers.



- (a) Calculer l'aire exacte du carré en unité d'aire.
- (b) En poursuivant le même algorithme de construction (initié sur le schéma précédent et en construisant deux autres triangles rectangles et dont l'un des côtés de l'angle droit a pour mesure une unité de longueur), réaliser, sur la figure ci-dessous, un carré d'aire 5.



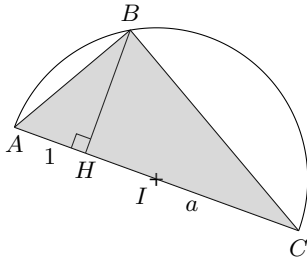
2. Construction à la règle et au compas d'un carré d'aire  $a$  (en unité d'aire) dans le cas général.

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. On considère un demi-cercle de diamètre  $[AC]$  de longueur  $1 + a$ .

On place le point  $H$  du segment  $[AC]$  tel que  $AH = 1$ .

Le point  $B$  est à l'intersection de la perpendiculaire à la droite  $(AC)$  passant par  $H$  et du demi-cercle de diamètre  $[AC]$ .

Le point  $I$  est le milieu du segment  $[AC]$ .



- Justifier que  $BI = \frac{1}{2}(a + 1)$ .
  - Établir que  $HI = \frac{1}{2}(a - 1)$ .
  - Construire la figure dans le cas où  $a = 5$ .
  - En déduire un algorithme de construction à la règle et au compas d'un carré d'aire 5 unités. Construire ce carré.
3. Construction à la règle et au compas d'un carré d'aire  $c$  (en unité d'aire) autre méthode.
- Rappel : un nombre entier est dit premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.*
- Soit  $c$  un nombre premier strictement supérieur à 2.
- Démontrer que s'il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que  $c = b^2 - a^2$ , alors nécessairement :
    - $a$  et  $b$  sont consécutifs,
    - $a = \frac{c-1}{2}$  et  $b = \frac{c+1}{2}$ .
  - Vérifier que  $a$  et  $b$  sont consécutifs et vérifient  $c = b^2 - a^2$ .
  - En déduire, à l'aide d'un triangle rectangle, un protocole de construction d'un côté de longueur  $\sqrt{c}$ , puis en déduire un protocole de construction d'un carré d'aire  $c$ .
  - Réaliser une telle construction pour un carré d'aire 13.