EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2023

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANCAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-8h00-10h00

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux candidats ayant suivi **la spécialité mathématique**.

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 10h00

Une pause de quinze minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 6 pages (dont la page de garde).

Exercice 1 : La piste d'athlétisme des 400mètres

Cet exercice comporte une page d'annexes à rendre avec la copie.

Sur une piste d'athlétisme, afin d'éviter que les coureurs ne se gènent, des lignes blanches continues délimitent différents couloirs, mesurant chacun 1,22m de large, comme indiqué sur l'annexe 1 où seuls 3 couloirs ont été représentés. Ces lignes sont constituées de lignes droites de longueur a et de demi-cercles. On note b le diamètre des demi-cercles de la ligne centrale.

Les coureurs n'ont pas le droit de franchir les lignes de leur couloir, sous peine d'être disqualifiés. Pour mesurer la longueur d'un couloir, on se place à 30 cm de la ligne centrale, pour le couloir n°1, et à 20cm de la ligne intérieure de chacun des autres couloirs. (C'est ce qu'indiquent les lignes pointillées sur l'annexe 1)

Dans ces conditions, le couloir n°1 mesure 400m de long.

Lors d'une course de 400m, le gagnant sera le premier à avoir franchi la ligne L notée sur le schéma.

1) En Annexe 2, on a une photo d'un départ des 400m. Expliquer pourquoi les coureurs sont décalés les uns par rapport aux autres.

2) Dans cette question, on note $f(x)$ la longueur en mètres de la trajectoire d'un coureur qui fait un tour de piste en restant à x mètres de la ligne centrale.
   a) Justifier que $f(0{,}3) = 400$
   b) Démontrer, en vous aidant éventuellement d'une figure, que pour tout réel x positif, on a :
   $$f(x) = 2\pi x + 2a + \pi b.$$
   c) En déduire que pour tous réels positifs x et Δ, on a : $f(x + \Delta) = f(x) + 2\pi\Delta$
   d) Compléter le tableau de l'annexe 3 qui donne la longueur de chacun des couloirs, arrondie au centimètre près.
   e) En déduire la distance qui sépare les lignes de départ des 400m sur chacune des pistes (voir annexe 2)

3) Alex et Béa ont l'habitude de courir ensemble sur une piste d'athlétisme comme celle de l'annexe 1. Alex court sur le couloir n°1 et Béa sur le couloir n°2. On admet qu'ils courent en suivant la ligne indiquée par des pointillés de leur piste respective (voir annexe 1).
   Ils partent tous deux de la ligne L et effectuent plusieurs tours en restant toujours côte à côte.

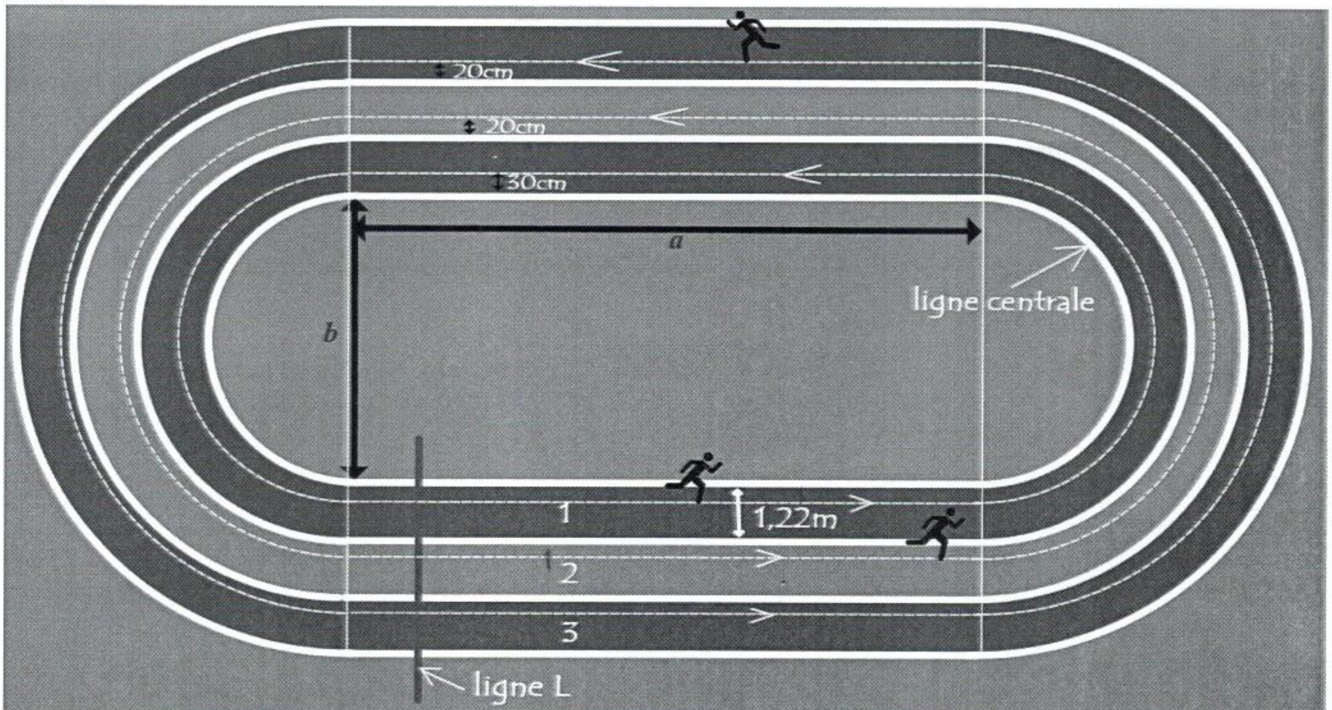
   a) Qui a la vitesse moyenne la plus grande ?
   b) Exprimer la vitesse moyenne V_2 de Béa en fonction de la vitesse moyenne V_1 d'Alex.

4) On rappelle qu'Alex court sur le couloir n°1 à partir de la ligne L. On a représenté sur l'annexe 4 la distance parcourue par Alex depuis chaque passage par la ligne L, en fonction du temps depuis lequel il court.
   a) Combien de temps a couru Alex ?
   b) Combien de tours de piste a-t-il fait en tout ?
   c) Déterminer la vitesse d'Alex en kilomètres par heure.

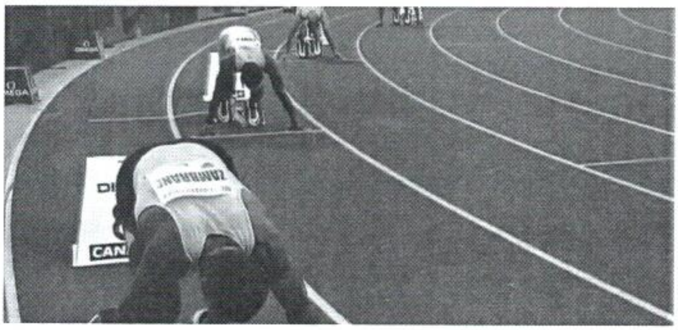
5) Camille marche à vitesse constante sur le couloir n°1 en suivant les pointillés de sa piste.
   Alex a remarqué qu'il a, à plusieurs reprises, dépassé Camille lors de sa course, notamment 100 m après la ligne L lors de son 3$^{\text{ème}}$ tour de piste, et 100 m avant la ligne L le tour d'après.
   Camille marchait déjà avant qu'Alex ne vienne courir, et continuait encore après.
   En justifiant, répondez aux questions suivantes : (*Aide : utiliser la figure de l'annexe 4 qui sera rendue*)
   a) Combien de fois Alex a-t-il dépassé Camille pendant sa course ?
   b) A quelle vitesse marche Camille ?

Annexes à rendre avec la copie :

Annexe 1 :



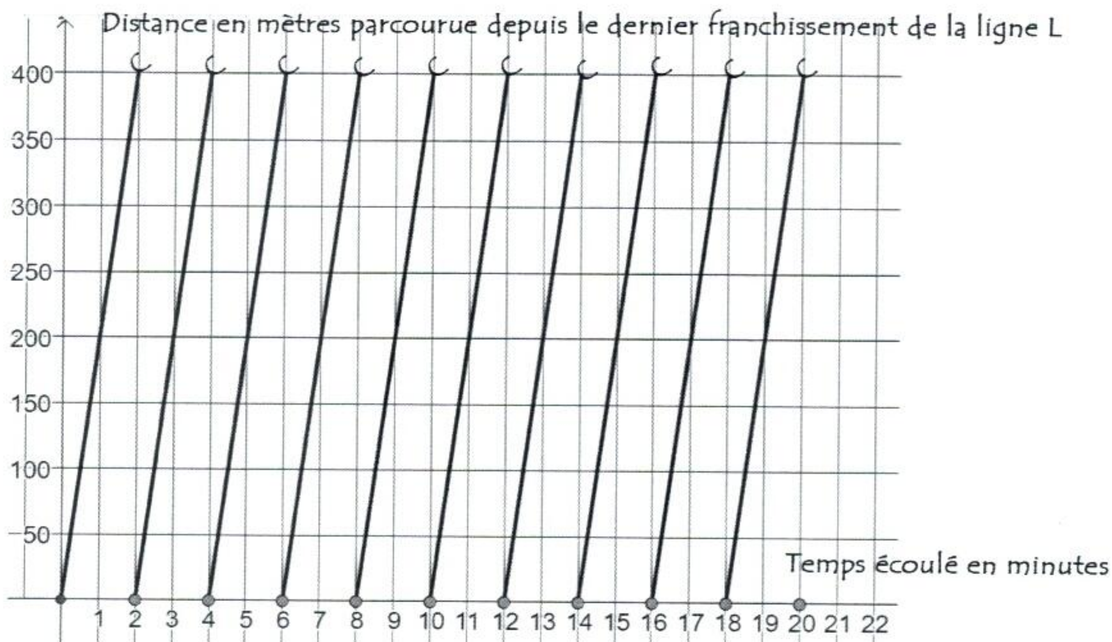
Annexe 2 :



Annexe 3 :

N° du couloir :	Longueur du couloir en mètres arrondi au centimètre
1	400,00
2	407,04
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Annexe 4 :



Exercice 2 : Calcul dans l'ensemble des nombres complexes-**annexe à rendre avec la copie**

Notations

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.
On considère l'ensemble G des couples $(r\,;s)$ de nombres rationnels tels que $r^2+s^2=1$.
Par exemple : $1^2+0^2=0^2+1^2=1$ avec $0\in\mathbb{Q}$ et $1\in\mathbb{Q}$ donc $(1;0)\in G$ et $(0;1)\in G$,
Désormais, les éléments $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$ de l'ensemble G sont respectivement notés 1_G et i.

Un élément quelconque de G sera généralement nommé z ou z_1 ou z_2 ...
$z\in G$ signifie que z s'écrit $z=(r\,;s)$ où r et s sont deux nombres rationnels tels que $r^2+s^2=1$.

Partie I

Question 1

a) Parmi les couples $(0\,;\,0)$, $(1\,;\,1)$, $\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{-4}{5}\right)$, $\left(\frac{12}{13}\,;\,\frac{5}{13}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$, quels sont ceux qui appartiennent à l'ensemble G ? Justifier.

b) Soient r et s deux nombres rationnels.
Montrer que : si $(r\,;s)\in G$, alors $(s\,;r)\in G$ et $(r\,;-s)\in G$

c) Démontrer que, pour tout nombre rationnel r : $(r;r)\notin G$.

Définition de l'opposé de z et du conjugué de z

Soit $z=(r\,;s)\in G$.
Le couple $(-r\,;-s)$, noté $-z$, est appelé l'**opposé** de z ;
Le couple $(r\,;-s)$, noté $\bar{z}$, est appelé le **conjugué** de z.

Question 2

a) Ecrire les couples -1_G , $-i$, $\overline{1_G}$ et $\bar{i}$.

b) Montrer que pour tout $z\in G$: $-z\in G$, $\bar{z}\in G$ et $-\bar{z}\in G$.

Partie II

Définition du « produit » de deux éléments z_1 et z_2 de l'ensemble G

Soient $z_1=(r_1\,;s_1)\in G$ et $z_2=(r_2\,;s_2)\in G$.
Le « produit » de z_1 et z_2, noté $z_1\otimes z_2$, est égal à : $z_1\otimes z_2=(r_1r_2-s_1s_2\,;r_1s_2+r_2s_1)$

Question 3

a) Calculer $\left(\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)\otimes\left(\frac{12}{13}\,;\,\frac{5}{13}\right)$.

b) Soit $z\in G$.
Calculer $z\otimes 1_G$, $z\otimes i$, $z\otimes\bar{z}$.

c) Démontrer que : si $z_1\in G$ et $z_2\in G$, alors $z_1\otimes z_2\in G$.

Définition des « puissances » de z pour $z\in G$

Soit $z\in G$. On note : $z^0=1_G$; $z^1=z$ et,

pour tout entier naturel $n\geq 2$, $z^n=z\otimes\ldots\otimes z$ (produit de n facteurs égaux à z).

Question 4

a) Vérifier que, pour tout $z\in G$ et tous entiers naturels n et m, on a :

$$z^n\otimes z^m=z^{n+m}\quad\text{et}\quad(z^n)^m=z^{n\times m}$$

b) Calculer i^2, puis i^3 et i^4, en fonction de 1_G et i.

c) En déduire i^{2023}.

Partie III

Un script en langage Python

```
def zpower(r, s, n) :
    a = 1
    b = 0
    for k in range(n) :
        c = a*r – b*s
        d = a*s + b*r
        a = c
        b = d
    return a, b
```

Question 5

a) Que renvoie l'entrée zpower(0, 1, 2023) ?

b) Quel est le rôle de ce script ?

Partie IV

Représentation géométrique des éléments de l'ensemble G

L'ensemble G est représenté géométriquement de la manière suivante :

À tout élément $z = (r\,;s) \in G$, on associe le point M de coordonnées $(r\,;s)$ dans un repère orthonormé du plan.

Question 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ d'**unité graphique 5 cm**.
Ainsi, le point A est associé à 1_G et le point B est associé à i.

a) Placer sur l'**annexe** les points $\mathrm{A'}$ et $\mathrm{B'}$ respectivement associés à i^2 et i^3, puis tracer le quadrilatère $\mathrm{ABA'B'}$.
Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.

b) Quel est le point associé à i^{2023} ?

Annexe de l'exercice 2 à rendre avec la copie

À compléter et à rendre avec la copie