Olympiades mathématiques de première 2023. Sujet national (Métropole, Europe,Afrique, Orient, Inde).

Exercice de spécialité. Une descente infinie.

Dans tout l'exercice α désigne un entier naturel supérieur ou égale à 4.
On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

$$(\mathrm{E}) : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de **(E)** est (0,0,0).

Partie 1.

Soient b et c deux réels. On considère la fonction P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $P(x) = x^2 + bx + c$. Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.
2. On suppose ici $b \leqslant 0$ et $c \geqslant 0$.
   Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2.

1. (a) On suppose que le triplet $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|,|x_2|,|x_3|)$ est aussi solution de l 'équation (E).

   (b) En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de (0,0,0) solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de (0,0,0) solution de l'équation (E).
2. Si le triplet $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2,x_1,x_3) ?
3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet (0,0,0), alors elle admet une solution (x_1,x_2,x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet (0,0,0) et telle que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.

Partie 3.

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1,x_2,x_3) différent de (0,0,0) solution de (E) et tel que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.
2. On définit la fonction Q de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.
   Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

   (a) Soit y un réel. Montrer que (x_1,x_2,y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.

   (b) Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.

   (c) Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.

   (d) Quel est le signe de $Q(0)$?

   (e) Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres 0, x_2 et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.

   (f) Montrer que (x_1,x_2,y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet (x_1,x_2,x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2 et y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à un absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :
   « Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geqslant 2$.
   L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \dots x_n$ d'inconnue $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0,\dots,0)$. »