Une descente infinie.

Partie 1 - 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$

donc : $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + bx + c$.

Du fait de l'unicité de l'écriture developpée, réduite et ordonnée d'une expression polynomiale on en déduit par identification :

$$\boxed{\begin{cases} -(r_1 + r_2) = b \\ r_1 r_2 = c \end{cases}}$$

Partie 1 - 2

D'après la question précédente, si $b \leq 0$ alors :

$$r_1 + r_2 \geq 0.$$

De même si $c \geq 0$ alors : $r_1 r_2 \geq 0$.

De : $r_1 r_2 \geq 0$, nous déduisons que les racines sont de même signe.

Comme de plus : $r_1 + r_2 \geq 0$, nécessairement :

$\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont positifs.}}$

Partie 2 - 1 - (a)

Supposons (x_1, x_2, x_3) solution de (E).

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$= \alpha x_1 x_2 x_3$$

Or $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$ implique que $\alpha x_1 x_2 x_3 \geq 0$

donc

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = |\alpha x_1 x_2 x_3|$$
$$= |\alpha| \times |x_1| \times |x_2| \times |x_3|$$

Enfin, puisque $\alpha \geq 4$,

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \alpha \times |x_1| \times |x_2| \times |x_3|$$

Autrement dit : $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est solution de (E).

Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de (E) alors $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est solution de (E).

Partie 2 - 1 - (b)

Si (x_1, x_2, x_3) est un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ alors $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est un triplet d'entiers naturels non nul (différent de $(0,0,0)$).

Et donc, d'après la question précédente

si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est solution de (E) alors $(|x_1|, |x_2|, |x_3|) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est solution de (E).

Partie 2 - 2

Du fait de la commutativité de l'addition et de la multiplication

si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de (E) alors $(x_2, x_1, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est aussi solution de (E).

Partie 2 - 3

D'après la question 2-1-(b) tout triplet non nul permet de trouver un triplet non nul de nombre positif.

D'après la question 2-2 l'ordre des nombres dans un triplet solution n'importe pas.

Ainsi, s'il existe une solution non identiquement nulle, alors il existe une solution qui est un triplet de nombres positifs non tous nuls rangés dans l'ordre croissant.

Partie 3-1

$x_1 \in \mathbb{N}$ donc $x_1 \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant $x_1 = 0$.

Puisque (x_1, x_2, x_3) est solution de (E):

$$|x_2|^2 + |x_3|^2 = 0$$

et donc $x_2 = x_3 = 0$.

Ce qui est impossible car (x_1, x_2, x_3) est supposé différent de $(0, 0, 0)$.

Nous avons démontré par l'absurde que:

$$x_1 > 0.$$

Partie 3-2-(a)

(x_1, x_2, y) est solution de (E) équivaut successivement à:

$$x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$$

$$x_1^2 + x_2^2 + y^2 - \alpha x_1 x_2 y = 0$$

$$y^2 - \alpha x_1 x_2 y + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$Q(y) = 0.$$

(x_1, x_2, y) est solution de (E) si et seulement si $Q(y) = 0$.

Partie 3 - 2 - (b)

D'après l'énoncé (x_1, x_2, x_3) est solution de (E) donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{x_3 \text{ est racine de } Q.}$$

Partie 3 - 2 - (c)

* D'une part : $Q(x_2) = x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2$
* D'autre part :

$$(3 - \alpha x_1) x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$$
$$= 3x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2 + x_1^2 - x_2^2$$
$$= x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2$$

* Donc : $\boxed{Q(x_2) = (3 - \alpha x_1) x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2).}$

Etudions le signe de $Q(x_2)$.

* $\begin{cases} \alpha \geq 4 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$ donc $\alpha x_1 \geq 4 \times 1$, par produit membre à membre des inéquations à termes positifs.

Ainsi $\alpha x_1 > 3$

et donc : $3 - \alpha x_1 < 0$

Puisque $x_2^2 > 0$:

$$(3 - \alpha x_1) x_2^2 < 0 \quad (1)$$

* $0 < x_1 \leq x_2$ par construction, donc $x_1^2 \leq x_2^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin : $x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \quad (2)$

* En sommant membre à membre (1) et (2) :

$$(3-\alpha x_1)x_2^2+(x_1^2-x_2^2)<0$$

i.e.

$$\boxed{Q(x_2)<0}.$$

Partie 3 - 2 - (d).

* $Q(0)=x_1^2+x_2^2$.
* $x_1>0$, donc, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x_1^2>0$.

Par conséquent : $x_1^2+x_2^2>0$, puisque $x_2^2\geq 0$.

* Finalement : $\boxed{Q(0)>0}$.

Partie 3 - 2 - (e).

* Nous avons établi : $\begin{cases} Q(x_2)<0 \\ Q(0)>0 \end{cases}$

donc il existe $y\in\,]0;x_2[$ tel que $Q(y)=0$.

Autrement dit $\boxed{Q \text{ a deux racines distinctes : } y \text{ et } x_3}$

* En particulier : $\boxed{0<y<x_2\leq x_3}$

car $x_2\leq x_3$ par construction. De plus $Q(x_3)=0\neq Q(x_2)$

donc : $x_2<x_3$.

Partie 3 - 2 - (f)

* Par construction de y, $Q(y)=0$, or d'après la question 3-2-(a) cela équivaut à dire que (x_1,x_2,y) est solution de (E)
* Puisque y et x_3 sont racines du polynôme unitaire (coefficient dominant 1) de degré deux Q : $-(y+x_3)=-\alpha x_1x_2$.

et donc $y = \alpha x_1 x_2 - x_3$

Par conséquent : $y \in \mathbb{N}$.

* Finalement :

(x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de (E).

Partie 3_3

En appliquant le précédent raisonnement nous pouvons affirmer qu'il existe un réel y_1 tel que $0 < y_1 < y$ et (x_1, y_1, y) est un triplet d'entiers naturels solution de (E).

Partie 3_4

En réitérant ce qui fut fait aux questions 2 et 3 nous pouvons construire une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ d'entiers naturels strictement décroissante.

Ce qui est impossible. Or nous avions supposé l'existence d'un triplet d'entiers naturels solution de (E) et différent de $(0;0,0)$ donc :

la seule solution à (E) dans $\mathbb{Z}^3$ est $(0,0,0)$,

la conclusion s'étendant à $\mathbb{Z}$ d'après la partie 2.

Partie 3_5

Il faut reprendre le raisonnement des parties 2 et 3 en choisissant :

$$Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_n + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$