Dérivation dans un anneau.

Dans l'exercice qui va suivre, on considère A un ensemble quelconque (comme par exemple, $A = \mathbb{N}$, ou $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{R}$), sur lequel nous allons définir deux lois $+$ et $\otimes$ de la manière suivante.

- Pour tous x et y dans A, on a $x + y \in A$ et $x + y = y + x$.
- Il existe un unique élément de A, noté 0_A tel que, pour tout x de A, on a : $x + 0_A = 0_A + x = x$.
- Pour tous x, y et z dans A : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Pour tout élément $x \in A$, il existe un unique $y \in A$ tel que $x + y = y + x = 0_A$. On dit que y est l'opposé de x. On le note $-x$. On a alors pour tous x et y de A : $x - y = x + (-y)$.
- Pour tous x et y de A, on a $x \otimes y \in A$.
- Pour tous x, y et z de A, on a $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.
- Il existe un unique élément de A, noté 1_A tel que, pour tout x de A, on a : $x \otimes 1_A = 1_A \otimes x = x$.
- Pour tous éléments x, y et z de A : $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ et $(y + z) \otimes x = y \otimes x + z \otimes x$.

Attention : la loi $\otimes$ n'est pas supposée commutative, on ne peut pas écrire que $x \otimes y = y \otimes x$ pour x et y éléments de A.

Une application $D : A \to A$ est appelée dérivation sur A si et seulement si pour tous x et y de A :

- $D(x + y) = D(x) + D(y)$. (i)
- $D(x \otimes y) = x \otimes D(y) + D(x) \otimes y$. (ii)

Partie I.

On note ici pour tous a et b éléments de A : $< a,b >= a \otimes b - b \otimes a$.

1. Pour a et b deux éléments de A, calculer $< a,b > + < b,a >$. En déduire $< b,a >$ en fonction de $< a,b >$.
2. Pour tous a, b et c de A, montrer que $< a,b + c >=< a,b > + < a,c >$.
3. Pour tous a, b et c de A, montrer que : $< a, < b,c >>= a \otimes b \otimes c - a \otimes c \otimes b - b \otimes c \otimes a + c \otimes b \otimes a$. En déduire que $< a, < b,c >>=< b, < c,a >> + < c, < a,b >>= 0_A$.
4. Pour tout a dans A, on note d_a l'application de A dans A définie par $d_a(x) =< a,x >= a \otimes x - x \otimes a$. Montrer que d_a est une dérivation sur A, c'est-à-dire que pour tous x et y de A, on a : $d_a(x + y) = d_a(x) + d_a(y)$ et $d_a\,(x \otimes y) = x \otimes d_a(y) + d_a(x) \otimes y$.

Partie II.

On note dorénavant, pour tous x de A et n de $\mathbb{Z}$:

$$nx = \begin{cases} x + x + \cdots + x & (n \text{ fois si } n > 0) \\ 0_A & \text{si } n = 0 \\ (-x) + (-x) + \cdots + (-x) & (-n \text{ fois si } n < 0) \end{cases}.$$

1. Montrer en utilisant (i) que $D(0_A) = D(0_A) + D(0_A)$ et en déduire $D(0_A)$.
2. Montrer en utilisant (ii) que $D(1_A) = 0$.
3. Montrer que pour tout x de A, $D(-x) = -D(x)$.
4. Si pour un élément x de A, il existe un élément y de A tel que $x \otimes y = y \otimes x = 1_A$, alors, on note $y = x^{-1}$ et y est appelé l'inverse de x. Montrer que $D(x^{-1}) = -x^{-1} \otimes D(x) \otimes x^{-1}$.

5. Pour tout x de A et n de $\mathbb{N}^*$, on note $x^n = x \otimes x \otimes \cdots \otimes x$, avec n facteurs x. On note $x^0 = 1_A$.
   (a) Calculer $D(x^2)$, puis $D(x^3)$.
   (b) On suppose maintenant que x et $D(x)$ commutent, c'est-à-dire que $x \otimes D(x) = D(x) \otimes x$.
      i. Que deviennent les formules $D(x^2)$ et $D(x^3)$?
      ii. Conjecturer $D(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.