EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2022

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

académie La Réunion

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-13h-15h

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux candidats ayant suivi **la spécialité mathématique**.

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 15h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte **4 pages** (dont la page de garde).

EXERCICE 1 : Décomposons

« Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels »

Pythagore (569 avant J-C ; vers 500 avant J-C)

En arithmétique, nous disons que 4 divise 20 car si nous faisons 20 divisé par 4, nous obtenons 5 qui est un entier naturel. Par contre, 4 ne divise pas 22 car 22/4 = 5, 5 et 5,5 n'est pas un entier naturel. De manière générale, nous disons que l'entier m divise l'entier n s'il existe un entier k tel que m × k = n. Par exemple, 14 divise 42 car 14 × 3 = 42. L'étude des diviseurs d'un nombre est un point important pour plein de problèmes mathématiques.

Dans ce sujet, étant donné un entier naturel non nul n, nous allons nous intéresser à :
- l'ensemble des diviseurs de n, noté D(n),
- l'ensemble des nombres compris entre 1 et 9 qui divisent le nombre n, noté C(n),
- l'ensemble des chiffres unités des diviseurs de n, noté U(n).

Par exemple, considérons le nombre 42. Nous avons D(42)={1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42}. Dans ce cas, nous pouvons en déduire C(42)={1 ;2 ; 3 ; 6 ; 7 } en ne gardant que les éléments de D(42) compris entre 1 et 9, et également U(42)={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7} en ne conservant que les chiffres unités des éléments de D(42). Ainsi, 4 appartient à U(42) car 14 divise 42.

Dans ce qui suit, toute réponse doit être soigneusement justifiée.
Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'ensemble C(n) n'est jamais vide.

2. Donner l'ensemble D(54) en déterminant les 8 diviseurs de 54. En déduire les ensembles C(54) et U(54).

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, si 4 appartient à C(n), alors 2 appartient à C(n). Que dire si 6 appartient à C(n) ? Donner tous les nombres a et b qui vérifient : « si a appartient à C(n) alors b appartient à C(n) ».
Montrer que ce raisonnement ne s'applique pas à U(n) pour toute valeur de n.

4. Déterminer une valeur de n pour que C(n) contienne le plus grand nombre possible d'éléments et expliciter C(n). Donner la plus petite valeur de n associé à un tel ensemble.

5. Déterminer une valeur de n pour que U(n) contienne le plus grand nombre possible d'éléments et expliciter U(n). Donner la plus petite valeur de n associé à un tel ensemble.

6. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, tout élément de C(n) appartient à U(n).

7. Soit m un entier naturel non nul. Montrer que si m divise n, alors tout élément de C(m) appartient à C(n). A-t-on le même résultat pour U(m) et U(n), c'est-à-dire : si m divise n, alors tout élément de U(m) appartient à U(n) ?

EXERCICE 2 : Dérivation dans un anneau

Dans l'exercice qui va suivre, on considère A un ensemble quelconque (comme par exemple, $A = \mathbb{N}$, ou $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{R}$), sur lequel nous allons définir deux lois $+$ et $\otimes$ de la manière suivante.

- Pour tous x et y dans A, on a $x + y \in A$ et $x + y = y + x$.
- Il existe un unique élément de A, noté 0_A tel que, pour tout x de A, on a :
$$x + 0_A = 0_A + x = x.$$
- Pour tous x, y, z dans A : $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Pour tout élément $x \in A$, il existe un unique $y \in A$ tel que $x + y = y + x = 0_A$. On dit que y est l'opposé de x. On le note $-x$. On a alors pour tous x et y de A :
$$x - y = x + (-y).$$
- Pour tous x, y de A, on a $x \otimes y \in A$.
- Pour tous x, y, z de A, on a $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.
- Il existe un unique élément de A, noté 1_A tel que, pour tout x de A, on a :
$$x \otimes 1_A = 1_A \otimes x = x.$$
- Pour tous éléments x, y, z de A :
$$x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z \quad \text{et} \quad (y + z) \otimes x = y \otimes x + z \otimes x.$$

Attention :

la loi $\otimes$ n'est pas supposée commutative, on ne peut pas écrire que $x \otimes y = y \otimes x$ pour x et y éléments de A.

Une application $D: A \longrightarrow A$ est appelée dérivation sur A si et seulement si pour tous x et y de A :

- $D(x + y) = D(x) + D(y)$. *(i)*
- $D(x \otimes y) = x \otimes D(y) + D(x) \otimes y$. *(ii)*

Partie I.

On note ici pour tous a et b éléments de A : $< a, b >= a \otimes b - b \otimes a$.

1) Pour a et b deux éléments de A , calculer $< a, b > + < b, a >$.
   En déduire $< b, a >$ en fonction de $< a, b >$.

2) Pour tous a, b, c de A, montrer que $< a, b + c >=< a, b > + < a, c >$.

3) Pour tous a, b, c de A, montrer que :
$$< a, < b, c > >= a \otimes b \otimes c - a \otimes c \otimes b - b \otimes c \otimes a + c \otimes b \otimes a.$$
   En déduire que $< a, < b, c > > + < b, < c, a > > + < c, < a, b > >= 0_A$.

4) Pour tout a dans A, on note d_a l'application de A dans A définie par
$$d_a(x) =< a, x >= a \otimes x - x \otimes a.$$
   Montrer que d_a est une dérivation sure A, c'est-à-dire que pour tous x et y de A, on a :
$$d_a(x + y) = d_a(x) + d_a(y) \quad \text{Et} \quad d_a(x \otimes y) = x \otimes d_a(y) + d_a(x) \otimes y.$$

Partie II.

On note dorénavant, pour tous x de A et n de Z :

$$nx = \begin{cases} x + x + \cdots + x \ \ (n \text{ fois si } n > 0) \\ 0_A \ \text{ si } n = 0 \\ (-x) + (-x) + \cdots + (-x) \ \ (-n \text{ fois si } n < 0) \end{cases}$$

1) Montrer en utilisant *(i)* que $D(0_A) = D(0_A) + D(0_A)$ et en déduire $D(0_A)$.

2) Montrer en utilisant *(ii)* que $D(1_A) = 0$.

3) Montrer que pour tout x de A, $D(-x) = -D(x)$.

4) Si pour un élément x de A , il existe un élément y de A tel que
$$x \otimes y = y \otimes x = 1_A$$
   Alors, on note $y = x^{-1}$ et y est appelé l'inverse de x.
   Montrer que $D(x^{-1}) = -x^{-1} \otimes D(x) \otimes x^{-1}$.

5) Pour tout x de A et n de $\mathbb{N}^*$, on note $x^n = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$, avec n facteurs x.
   On note $x^0 = 1_A$.
   a) Calculer $D(x^2)$, puis $D(x^3)$.

   b) On suppose maintenant que x et $D(x)$ commutent, c'est-à-dire que $x \otimes D(x) = D(x) \otimes x$.
      i. Que deviennent les formules $D(x^2)$ et $D(x^3)$?
      ii. Conjecturer $D(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.