# EXERCICES ACADEMIQUES
# OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2022

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

---

## EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-13h-15h

Ce sujet doit être distribué **aux élèves ne suivant pas la spécialité mathématique de la série générale**

Ils traiteront **les exercices 3 et 4**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 15h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte **4 pages** (dont la page de garde).

## Exercice 3 : DECOMPOSONS

« Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels »
Pythagore (569 avant J-C ; vers 500 avant J-C)

En arithmétique, nous disons que 4 divise 20 car si nous faisons 20 divisé par 4, nous obtenons 5 qui est un entier naturel. Par contre, 4 ne divise pas 22 car 22/4 = 5, 5 et le nombre 5,5 n'est pas un entier naturel. De manière générale, nous disons que l'entier m divise l'entier n s'il existe un entier k tel que m × k = n. Par exemple, 14 divise 42 car 14 × 3 = 42. L'étude des diviseurs d'un nombre est un point important pour plein de problèmes mathématiques.

Dans ce sujet, étant donné un entier naturel non nul n, nous allons nous intéresser à :
- l'ensemble des diviseurs de n, noté D(n),
- l'ensemble des nombres compris entre 1 et 9 qui divisent le nombre n, noté C(n),
- l'ensemble des chiffres unités des diviseurs de n, noté U(n).

Par exemple, considérons le nombre 42. Nous avons D(42)={1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42}. Dans ce cas, nous pouvons en déduire C(42)={1 ;2 ; 3 ; 6 ; 7 } en ne gardant que les éléments de D(42) compris entre 1 et 9, et également U(42)={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7} en ne conservant que les chiffres unités des éléments de D(42). Ainsi, 4 appartient à U(42) car 14 divise 42.

Dans ce qui suit, toute réponse doit être soigneusement justifiée.
Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'ensemble C(n) n'est jamais vide.

2. Donner l'ensemble D(54) en déterminant les 8 diviseurs de 54. En déduire les ensembles C(54) et U(54).

3. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, si 4 appartient à C(n), alors 2 appartient à C(n). Que dire si 6 appartient à C(n) ? Donner tous les nombres a et b qui vérifient : « si a appartient à C(n) alors b appartient à C(n) ».
   Montrer que ce raisonnement ne s'applique pas à U(n) pour toute valeur de n.

4. Déterminer une valeur de n pour que C(n) contienne le plus grand nombre possible d'éléments et expliciter C(n). Donner la plus petite valeur de n associé à un tel ensemble.

5. Déterminer une valeur de n pour que U(n) contienne le plus grand nombre possible d'éléments et expliciter U(n). Donner la plus petite valeur de n associé à un tel ensemble.

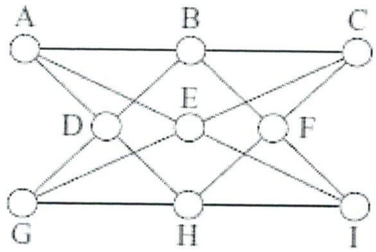
6. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, tout élément de C(n) appartient à U(n).

7. Soit m un entier naturel non nul. Montrer que si m divise n, alors tout élément de C(m) appartient à C(n). A-t-on le même résultat pour U(m) et U(n), c'est-à-dire : si m divise n, alors tout élément de U(m) appartient à U(n) ?

**Exercice 4 : Le jeu de Pappus**

L'annexe en page 4 peut vous êtes utile lors des phases de recherche.

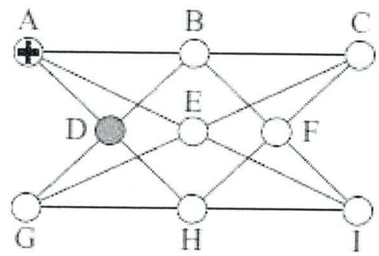
Le « jeu de Pappus » se pratique à deux joueurs sur la configuration géométrique ci-contre.
Cette configuration est composée de 9 points formant 8 alignements de 3 points.
Il est important de noter que les points **B, E** et **H** ne forment pas un alignement ni les points **D, E** et **F.**



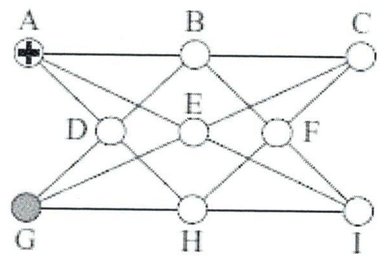

Chaque joueur choisit à tour de rôle un point et place sa marque dans le point. Le premier joueur qui parvient à placer sa marque dans les trois points d'un alignement a gagné la partie. Si aucun des deux joueurs n'y parvient, la partie est déclarée nulle.

Alex et Steph décident de jouer au jeu de Pappus. La marque d'Alex est une croix, celle de Steph est un coloriage gris. C'est Alex qui commence.

1. Dans cette première partie, Alex a choisi le point **A** puis, Steph a choisi le point **D**.
   (*voir la figure ci-contre*)
   a. Montrer que si, pour un second coup, Alex choisit le point **B** alors il sera sûr de gagner la partie.
   b. Alex sera-t-il sûr de gagner la partie s'il choisit le point **C** au lieu du point **B** lors de son second coup ?




2. Dans cette nouvelle partie, Alex a choisi à nouveau le point **A** puis, Steph a choisi le point **G**.
   (*voir la figure ci-contre*)
   Quel point doit maintenant choisir Alex pour être sûr de gagner la partie ?




3. Montrer que, quel que soit le premier point choisi, Alex peut toujours gagner la partie.

ANNEXE : Elle peut vous être utile lors des phases de recherche