Nombres sectionnables.

Partie A.

1) a) $21 = 1+2+3+\dots+6$ et $136 = 1+2+\dots+16$
donc 21 et 136 sont sectionnables unitaires.

60 et 61 trouvés grâce à $n^2 < 2a < (n+1)^2$

1) b) $\dfrac{60\times 61}{2} = 1830$ et $\dfrac{61\times 62}{2} = 1891$

donc $1+2+\dots+60 < 1850 < 1+2+\dots+61$

1850 n'est pas sectionnable unitaire.

Condition nécessaire et suffisante signifie équivalence.

2) a est sectionnable unitaire
si et seulement si : $\exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\},\ a = \dfrac{n(n+1)}{2}$

si et seulement si : $\exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\},\ 2a = n(n+1)$

Raisonnement par analyse synthèse possiblement attendu.

Autrement dit : a est sectionnable unitaire si et seulement si 2a est un produit de deux entiers supérieurs à 1.

TB

Partie B.

On essaye de sectionner en 2 en utilisant la moitié.

1) 9 et 15 sont sectionnables car :
$9 = 4+5$
$15 = 7+8$

La difficulté ici est de mettre en œuvre une méthode qui soit clairement exhaustive, puis de trouver une façon claire de présenter la démarche.

Montrons que 16 n'est pas sectionnable.

$1+2+3+4+5 < 16 < 1+2+3+4+5+6$

$2+3+4+5+6 > 16$

$3+4+5+6 > 16$

$1+2+3+4+5 < 16 < 1+2+3+4+5+6$

$2+3+4+5 < 16 < 2+3+4+5+6$

$3+4+5 < 16 < 3+4+5+6$

$4+5+6 < 16 < 4+5+6+7$

$5+6 < 16 < 5+6+7$

$6+7 < 16 < 6+7+8$

$7+8 < 16 < 7+8+9$

$8+9 > 16$

donc

16 n'est pas sectionnable.

Démonstration d'une implication avec un quantificateur universel.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$2n+1$ est impaire et $2n+1 \geqslant 3$.

On a : $2n+1 = n+(n+1)$ donc $2n+1$ est sectionnable.

Si un entier est impair et ~~sectionnable~~ ~~alors~~ supérieur ou égale à 3 alors il est sectionnable

3) $S = \underbrace{q+q+\dots+q}_{k \text{ fois}} + 1+2+\dots+k$

$= kq + \dfrac{k(k+1)}{2}$

d'où : $2S = 2kq + k(k+1)$

$$2S = k(2q+k+1)$$

4) $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$ ne sont pas sectionnables, pas plus que 2^2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

Démontrons en raisonant par l'absurde que 2^n n'est pas sectionnable.

~~Posi~~ $2 \times 2^n = k(k+1+2q)$ nous déduisons différents cas suivant l'expression de k comme puissance de 2.

* Si $k = 2^{n+1}$ alors $k+1+2q = 1$ ce qui est impossible car $k \geq 1$ et $q \geq 0$.
* Si $k = 1$ alors $k+1+2q = 2^{n+1}$ et donc $q+1 = 2^n$. Autrement dit 2^n serait une somme de $2^n - 1$ termes. Or même en additionnant les premiers entiers positifs on obtient : $(2^n-1)2^{n-1} = 2^n\left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) \geq 2^n\left(2^{2-1} - \frac{1}{2}\right) = 2^n \times 1,5 > 2^n$, donc il est impossible que 2^n soit sectionnable dans ce cas.
* Si $k = 2^m$ avec $m \in [\![1 ; n-1]\!]$ alors $k+1+2q = 2^{n-m}$. Autrement dit : $2^m + 1 + 2q = 2^{n-m}$. Ce qui est impossible car l'un des termes de l'égalité est pair et l'autre impair.

Dans tous les cas nous obtenons une impossibilité : nous avons démontré par l'absurde qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5) a) $56 = 2^3 \times 7$ donc
| si $n = 56$ alors $r = 3$ et $m = 7$

Dire que 56 est sectionnable c'est dire
qu'il peut s'écrire sous la forme S proposée en 3)
Pour trouver k et q raisonnons par analyse-synthèse.

* Analyse.
Supposons que 56 soit sectionnable, i.e.
qu'il existe des entiers k et q positifs avec
$k \geq 2$ tels que : $56 = (q+1) + \dots + (q+k)$.

D'après 3) :
$$2 \times 56 = k(k+1+2q)$$
i.e. $$2^4 \times 7 = k(k+1+2q).$$

Distinguons 2 cas.
1er cas : k est pair alors $k+1+2q$ est
un facteur impair de $2^4 \times 7$ et donc
$k+1+2q = 7$. Dans ce cas forcément $k = 2^4$.
On aurait donc :
$$2^4 \times 7 = 2^4(2^4+1+2q)$$
i.e. $$q = -5$$
ce qui est impossible car $q \geq 0$.

2d cas : k est impair et donc forcément
$$2^4 \times 7 = 7(7+1+2q)$$
i.e. $$q = 4$$

* Synthèse.

Supposons $k=7$ et $q=4$.

$S=(4+1)+(4+2)+\cdots+(4+7)$

$S=56$.

Nous avons démontré par analyse-synthèse de 56 est sectionnable.

5) b). $44=2^{2}\times 11$

donc : $44=(2+1)+\cdots+(2+11)$ convient

et

44 est sectionnable.

5) c) En reprenant le raisonnement de la question 5) a) avec $n=2^{k}\times m$ plutôt que 56 nous démontrerions que :

tout nombre pair qui n'est pas une puissance de deux est sectionnable.

6) D'après 2) les nombres impairs sont sectionnables.

Parmi les nombres pairs les puissances de 2 ne sont pas sectionnables mais les autres le sont (d'après les questions 4) et 5)).

Résumons :

tout les entiers supérieurs à 3 sont sectionnables hormis les puissances de 2.

Partie C.

1) $1+2+3+4 < 13 < 1+2+3+4+5$

$2+3+4 < 13 < 2+3+4+5$

$3+4+5 < 13 < 3+4+5+6$

$4+5 < 13 < 4+5+6$

$5+6 < 13 < 5+6+7$

$6+7 = 13$

donc $\boxed{13 \text{ est uniquement sectionnable.}}$

~~2) a)~~ $25 = 12+13$,

et $25 = 3+4+5+6+7$,

donc $\boxed{25 \text{ n'est pas uniquement sectionnable.}}$

2) a) D'après l'énoncé et la question B3), il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $2n = k(k+1+2q)$ avec $k \geqslant 3$ et donc $k+1+2q \geqslant 4$.

Ainsi : $\dfrac{k}{2} \geqslant 1,5$ et $\dfrac{k+1+2q}{2} \geqslant 2$.

Par conséquent n est un produit de deux entiers supérieurs à 2 donc

$\boxed{n \text{ n'est pas premier.}}$

2) b) D'après la question précédente, n étant premier, nécessairement $k \leq 2$.

Ainsi si n est premier il ~~n'est~~ ne peut être la somme que de deux nombres consécutifs.

Les nombres premiers supérieurs à 3 sont impaires

donc sectionnables d'après B2).
Ainsi les nombres premiers sont uniquement sectionnables.