EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-13h-15h

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux candidats ayant suivi **la spécialité mathématique**.

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 15h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 6 pages (dont la page de garde).

EXERCICE 1 : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

__Rappels :__

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire des réels admettant une écriture fractionnaire $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs. ($q \neq 0$)
- On rappelle que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors :

$a + b \in \mathbb{Q}$	$a \times b \in \mathbb{Q}$	et si $b \neq 0, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

- $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on étudie l'ensemble noté $\mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$, constitué de tous les réels pouvant s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$

__**Partie A : résultats préliminaires :**__

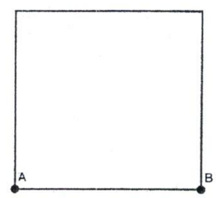
1) Justifier que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$:
   a) $5 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$
   b) 1
   c) $2\sqrt{2}$
2) Justifier que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$.
3) Le but de cette question est de démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
   On suppose que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
   a) Démontrer qu'alors $2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$
   b) Aboutir à une absurdité.

__**Partie B : Opérations dans** $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **:**__

1) Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ deux éléments quelconques de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   a) Montrer que $x + y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) Montrer que $x \times y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
2) Montrer que pour tous rationnels a et b, $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.
3) A l'aide de la question 2) démontrer que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
4) Soit $y = a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux rationnels non nuls un élément non nul de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   En vous inspirant des questions précédentes, montrer que $\frac{1}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5) Peut-on affirmer que si $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $y \neq 0$, alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Justifier.

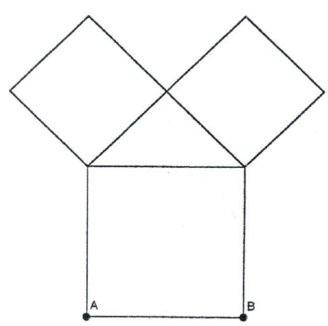
EXERCICE 2 : Un arbre pythagoricien.

Une unité graphique étant choisie, on construit le segment $[AB]$, horizontal et de longueur 4 unités. Sur ce segment, on construit un carré :



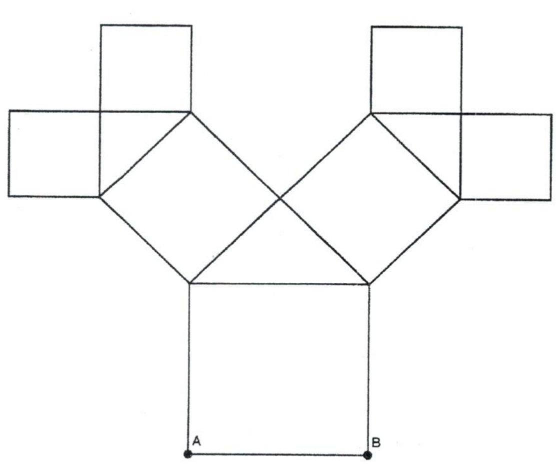
- <u>Étape 1 :</u>

Sur le côté supérieur de la figure, on construit un triangle rectangle isocèle. Puis sur chaque côté libre de ce triangle, on construit un nouveau carré :

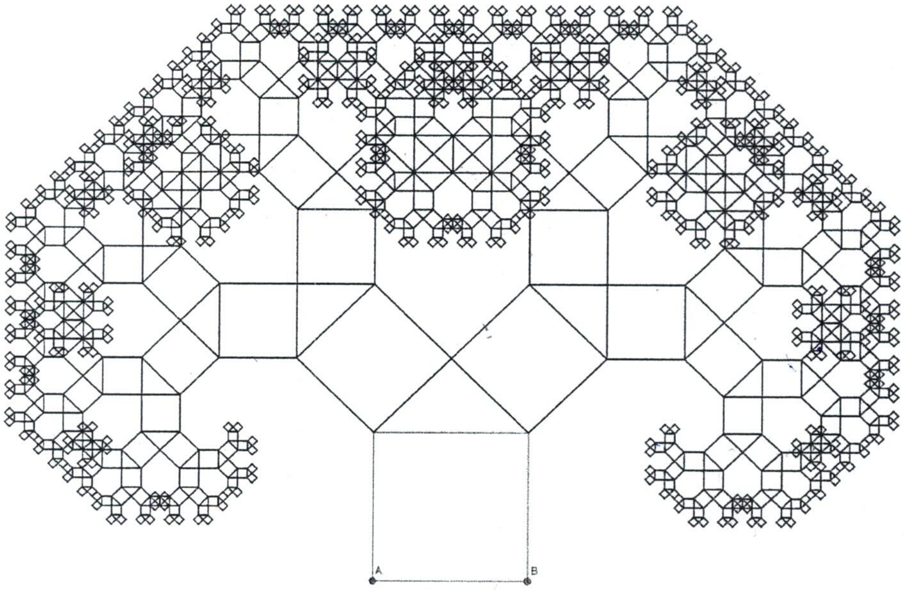


- <u>Étape 2 :</u>

La suite de la construction s'effectue sur le côté de chaque carré opposé au côté commun avec le triangle. Sur chaque carré construit à l'étape précédente, on construit un triangle isocèle, et sur chaque côté libre de ces triangles, un nouveau carré :



c) On considère la figure ci-dessous :



a) À quelle étape de construction cette figure correspond-elle ?

b) Déterminer les dimensions du plus petit carré, de base horizontale, contenant cette figure.

4) On remarque que certains des carrés construits se chevauchent. A partir de quelle étape ce chevauchement commence-t-il ?