EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-13h-15h

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux candidats ayant suivi **la spécialité mathématique**.

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 15h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 6 pages (dont la page de garde).

EXERCICE 1 : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Rappels :

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire des réels admettant une écriture fractionnaire $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs. $(q \neq 0)$
- On rappelle que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors :

$a + b \in \mathbb{Q}$	$a \times b \in \mathbb{Q}$	et si $b \neq 0, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

- $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on étudie l'ensemble noté $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, constitué de tous les réels pouvant s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$

Partie A : résultats préliminaires :

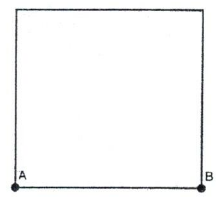
1) Justifier que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:
   a) $5 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$
   b) 1
   c) $2\sqrt{2}$
2) Justifier que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3) Le but de cette question est de démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
   On suppose que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
   a) Démontrer qu'alors $2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$
   b) Aboutir à une absurdité.

Partie B : Opérations dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

1) Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ deux éléments quelconques de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   a) Montrer que $x + y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) Montrer que $x \times y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
2) Montrer que pour tous rationnels a et b, $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.
3) A l'aide de la question 2) démontrer que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
4) Soit $y = a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux rationnels non nuls un élément non nul de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   En vous inspirant des questions précédentes, montrer que $\frac{1}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5) Peut-on affirmer que si $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $y \neq 0$, alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Justifier.

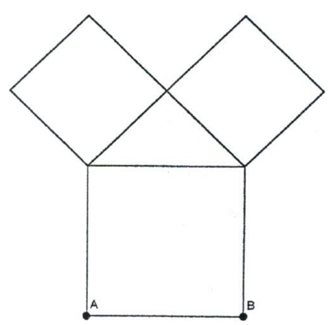
EXERCICE 2 : Un arbre pythagoricien.

Une unité graphique étant choisie, on construit le segment $[AB]$, horizontal et de longueur 4 unités. Sur ce segment, on construit un carré :



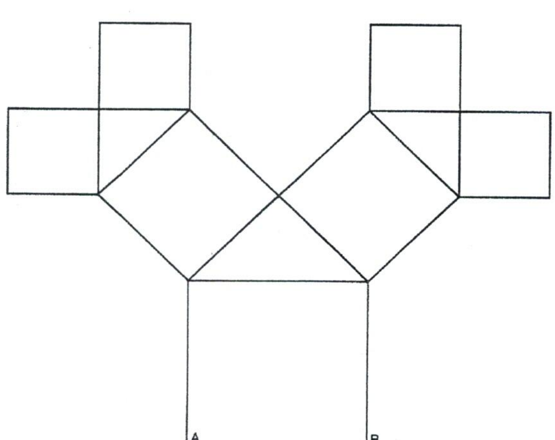
- <u>Étape 1 :</u>

Sur le côté supérieur de la figure, on construit un triangle rectangle isocèle. Puis sur chaque côté libre de ce triangle, on construit un nouveau carré :



- <u>Étape 2 :</u>

La suite de la construction s'effectue sur le côté de chaque carré opposé au côté commun avec le triangle. Sur chaque carré construit à l'étape précédente, on construit un triangle isocèle, et sur chaque côté libre de ces triangles, un nouveau carré :



On poursuit ainsi ce procédé de construction.

A. Construction :

Compléter la figure de la feuille annexe pour obtenir la figure construite après 3 étapes.

B. Le nombre de carrés :

1) Combien de carrés la figure contient-elle au total après 4 étapes ?

2) Combien de carrés la figure contient-elle au total après 8 étapes de construction ?

3) Écrire, en langage Python, un programme qui permette de calculer le nombre de carrés construits au total après n étapes de construction.

C. Les dimensions de la figure:

On rappelle que le côté du carré de départ de la figure mesure 4 unités.

1) Quelle est la longueur du côté d'un carré construit à la première étape ? On note c_1 cette longueur.

2) c_2 est la longueur du côté d'un carré construit à l'étape 2. Calculer c_2.

3) On considère l'algorithme suivant, écrit en langage Python :

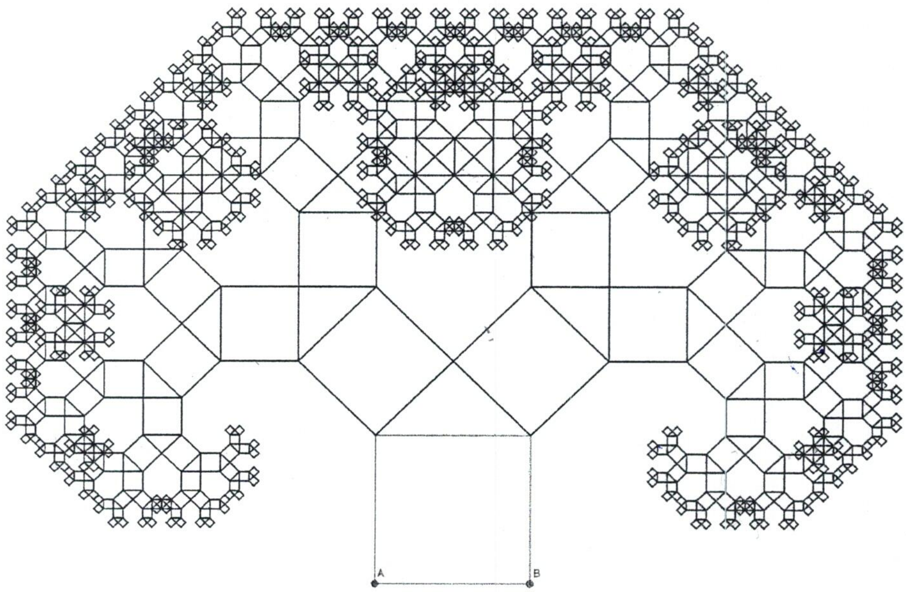
```
from math        *

def cote(n):
    c=4
        i    range (n):
        c=c/sqrt(2)
           c
```

Rappel : en langage Python, on écrit sqrt(2) pour $\sqrt{2}$.

a) Quel résultat renvoie cette fonction pour $n = 2$?

b) Quelle donnée de la figure obtenue à l'étape n cette fonction permet-elle de calculer ? Justifier .

c) On considère la figure ci-dessous :



a) À quelle étape de construction cette figure correspond-elle ?

b) Déterminer les dimensions du plus petit carré, de base horizontale, contenant cette figure.

4) On remarque que certains des carrés construits se chevauchent. A partir de quelle étape ce chevauchement commence-t-il ?

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

académie La Réunion

EXERCICES ACADEMIQUES

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-13h-15h

Ce sujet doit être distribué **aux élèves ne suivant pas la spécialité mathématiques de la série générale**

Ils traiteront **les exercices 3 et 4**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 15h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 3 pages (dont la page de garde).

EXERCICE 3 : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Rappels :

- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire des réels admettant une écriture fractionnaire $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs. ($q \neq 0$)
- On rappelle que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors :

$a + b \in \mathbb{Q}$	$a \times b \in \mathbb{Q}$	et si $b \neq 0, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

- $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on étudie l'ensemble noté $\mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$, constitué de tous les réels pouvant s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$

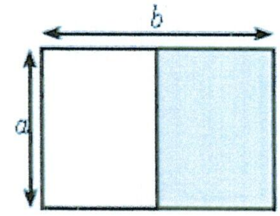
Partie A : résultats préliminaires :

1) Justifier que les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$:
   a) $5 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$
   b) 1
   c) $2\sqrt{2}$
2) Justifier que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})$.
3) Le but de cette question est de démontrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
   On suppose que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
   a) Démontrer qu'alors $2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2$
   b) Aboutir à une absurdité.

Partie B : Opérations dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

1) Soient $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ deux éléments quelconques de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   a) Montrer que $x + y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
   b) Montrer que $x \times y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
2) Montrer que pour tous rationnels a et b, $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.
3) A l'aide de la question 2) démontrer que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
4) Soit $y = a + b\sqrt{2}$ où a et b sont deux rationnels non nuls un élément non nul de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   En vous inspirant des questions précédentes, montrer que $\frac{1}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
5) Peut-on affirmer que si $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avec $y \neq 0$, alors $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Justifier.

EXERCICE 4 :



Soit un rectangle de côtés a et b, avec $a < b$ et $a > \dfrac{b}{2}$. On le plie suivant une ligne confondue avec la médiatrice des grands côtés : on obtient deux rectangles superposables avec a comme grand côté et $\dfrac{b}{2}$ comme petit côté.

On veut choisir le rectangle de départ afin que le rapport du grand côté sur le petit côté soit conservé après pliage.

1. **Cas particulier** : on prend $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{6}$.
   a) Montrer que $a > \dfrac{b}{2}$.
   b) Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{\frac{b}{2}}$.
   c) Le rectangle convient-il ?
2. **Cas général** :
   a) Montrer que $b = \sqrt{2}a$.
   b) On suppose qu'un tel rectangle a pour aire 1 m^2.
   Quelles sont ses dimensions, au millimètre près ?
   c) On répète quatre fois cette opération à partir du rectangle initial. Quelles sont les dimensions du rectangle obtenu ? Quelle est son aire ? Que reconnaît-on ?
   On arrondira chaque résultat au millimètre près par défaut.
3. **Prérequis** : la fonction $\boxed{\text{int()}}$ renvoie la partie entière d'un nombre réel.
   exemple : $\text{int}(3,6) = 3$
   a) Compléter le programme ci-dessous qui renvoie les dimensions du rectangle au bout de n pliages.

```
from math import *

def rectangle(n):
    a=841
    b=1189
    for k in range(.....):
        c=.....
        a=int(....)
        b=...
    return(....,....)
```

   b) En utilisant votre calculatrice, déterminer les dimensions du rectangle au bout de 10 pliages.