Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

# *Olympiades nationales de mathématiques 2021*

---

## EXERCICES NATIONAUX

Cette partie est individuelle

**Elle se déroule de 15h10 à 17h10**

Les candidats traitent deux exercices.

Les candidats ayant suivi **la spécialité mathématiques** traitent les exercices **numéros 1 et 2.**

Les candidats **n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques** traitent les **exercices numéros 1 et 3.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur. (Calculatrice en mode examen ou sans mémoire alphanumérique)

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Le sujet comporte 4 pages (dont la page de garde)

**Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)**

## *Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier*

*On rappelle qu'on nombre entier $m$ est un multiple d'un nombre entier $d$ s'il existe un nombre entier $q$ tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que $d$ est un diviseur de $m$. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier $n$.*

**1.** Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?

**2.** Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul $n$, on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.

**3.** Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

**4.** À tout diviseur $d$ d'un entier $n$ non nul on associe l'entier $q$ tel que $n = dq$. Si les diviseurs de $n$ sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

***a.*** Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$

***b.*** Si $a$ et $b$ sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

***c.*** En déduire, pour des nombres $d$ et $q$ tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

***d.*** En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel $n$ non nul.

**5.** ***a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs $d$ de $n$, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

***b.*** En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

***c.*** La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)**

## Entiers $N$ — décomposables

On donne un entier $N$ supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel $k$ est $N$ —décomposable s'il existe des entiers naturels $q$ et $r$ tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21 —décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64 —décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$.

**A. Quelques exemples**

**1. *a.*** Le nombre 7 est-il 22 —décomposable ? Est-il 10 —décomposable ?
***b.*** Le nombre 45 est-il 100 —décomposable ?

**2. *a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 —décomposables.
***b.*** Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 —décomposables.

**3.** Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
***a.*** Le nombre $N$ est-il $N$ —décomposable ?
***b.*** Prouver que $N - 1$ est $N$ —décomposable.
***c.*** Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas $N$ —décomposable.

**B. Une étude des nombres $N$ —décomposables**

Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
**1. *a.*** Prouver que si $k$ est $N$ —décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
***b.*** Quels sont les entiers 3 —décomposables ? Quels sont les entiers 4 —décomposables ?

**2.** Prouver que si $N \geq 2$ et si $k$ est $N$ —décomposable, alors il existe un unique couple $(q, r)$ d'entiers vérifiant le système $(S)$.

**3. *a.*** Soit $k$ un nombre $N$ —décomposable. Justifier qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
***b.*** Prouver que, réciproquement, si $k$ est un entier naturel et qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors $k$ est $N$ —décomposable.
***c.*** Soit $p$ un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est $2^{2p}$ —décomposable.

**4.** Prouver que si $k$ est $N$ —décomposable, alors $N - k$ est $N$ —décomposable.

**5.** Dans cette question, on suppose que $N$ est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas $N$ —décomposable.

**6.** Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers $N$ —décomposables.

**7.** Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers $N$ —décomposables.

**8.** On donne un entier $k$ supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $N$ tels que $k$ soit $N$ —décomposable.

**Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)**

## *Fractions et pyramides égyptiennes*

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

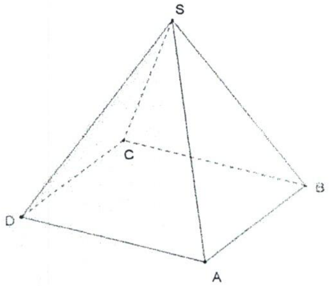
**1.** Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
***a.*** La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
***b.*** Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
***c.*** Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

**2.** On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.
Par exemple,

- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.
- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.
***a.*** Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel $x$ tel que $0 < x < 1$ ?
***b.*** Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.

**3.** On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :
- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.
***a.*** Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne




Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de sommet $S$ dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs $AB$ et $SA$ sont des *fractions égyptiennes*.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls $p$ et $q$ tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.
***b.*** Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

***c.*** Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul $n$ tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

***d.*** En déduire que si $p$ et $q$ sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.