EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

<u>EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-9h-11h</u>

Ce sujet doit être distribué **<u>exclusivement</u>** aux candidats ayant suivi **<u>la spécialité mathématique</u>.**

Ils traiteront les exercices 1 et 2.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

<u>Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 11h</u>.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 4 pages (dont la page de garde).

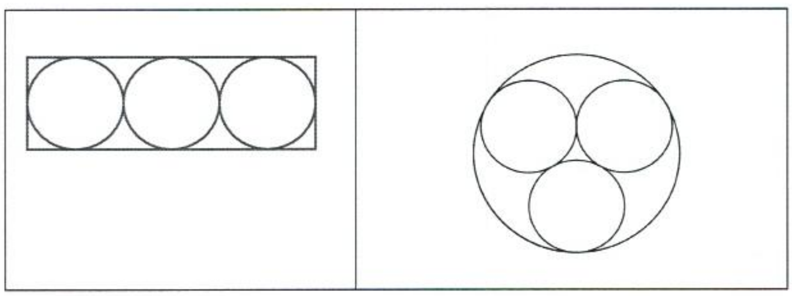
EXERCICE 1 : les mini-pizzas
(à traiter par les candidats ayant suivi la spécialité mathématiques)

Leonardo est un pizzaïolo très habile de ses mains. Il arrive à étaler sa pâte de façon parfaitement circulaire, mais aussi sous forme de rectangle de n'importe quelles dimensions.
Leonardo aimerait, pour un buffet, proposer des mini-pizzas rondes qu'il découpera dans sa pâte étalée, à l'aide d'un emporte-pièce de 10cm de diamètre.

Partie 1 : Pour faire 3 mini-pizzas.

Leonardo se demande comment étaler sa pâte pour pouvoir en sortir 3 mini-pizzas avec un minimum de perte.

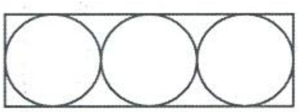
Il envisage donc les 2 formes qu'il sait faire, et fait les schémas suivants :



Dans chacun des cas, il souhaite calculer le pourcentage de perte, c'est-à-dire la quantité :

$$P = 100 - \frac{Aire\ des\ trois\ disques}{Aire\ de\ la\ pâte} \times 100$$

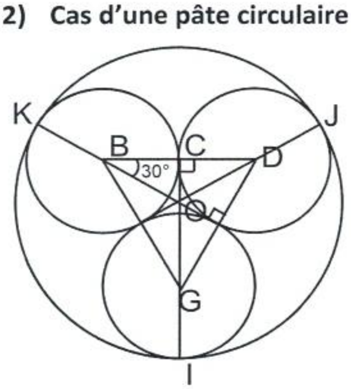
1) Cas d'une pâte rectangulaire :



a) Quelles sont les dimensions du rectangle ci-contre ? (**On rappelle que les cercles font 10 cm de diamètre**).

b) Quel est alors le pourcentage de perte dans le cas d'une pâte rectangulaire ? On arrondira au centième.

2) Cas d'une pâte circulaire :



Sur le schéma ci-contre, la pâte est un cercle de centre O et de rayon $[OI]$. Les points B, D et G sont les centres des cercles représentant les mini-pizzas. (**qui font 10 cm de diamètre**)

a) Démontrer que $CO = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(On rappelle que $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$).

b) Démontrer que $CG = 5\sqrt{3}$;

c) Déduire des questions précédentes que le rayon OI de la pâte circulaire vaut : $\frac{10\sqrt{3}}{3} + 5$

d) Pour faire 3 mini-pizzas, Leonardo doit-il privilégier la forme circulaire ou rectangulaire ?

Partie 2 : Avec 1kg de pâte.

Leonardo a eu une commande de 100 mini-pizzas. Sachant que chacune de ces mini-pizzas pèsera 10g, il fait une boule d'1kg de pâte. Il va l'étaler sur son plan de travail en forme de rectangle, et en sortir le maximum de mini-pizzas de 10cm de diamètre. Puis il recommencera en récupérant à chaque fois les chutes, en faisant le moins d'étapes possibles.

1) Première étape :

Leonardo choisit d'étaler sa pâte sous forme d'un rectangle.

a) Montrer que l'aire du rectangle qu'il obtiendra en étalant sa pâte sera de 2500π cm².
b) Le plan de travail de Leonardo est un rectangle de 65cm de large sur 200cm de long. Pourra-t-il y étaler sa pâte ?
c) Leonardo voudrait prendre 30cm de large. Est-ce possible ?
d) Afin d'avoir le moins de pertes possibles, Leonardo voudrait prendre une largeur qui soit un multiple de 10. Déterminer tous les cas possibles et compatibles avec son plan de travail. Vérifier que la configuration la plus rentable permettrait d'obtenir 78 mini-pizzas.

2) Deuxième étape :

Leonardo récupère ses chutes après avoir sorti les 78 mini-pizzas à la première étape. Il en fait une boule qu'il va à nouveau étaler de façon à obtenir un rectangle

a) Vérifier que le rectangle obtenu à la $2^{ème}$ étape aura pour aire 550π cm².
b) Vérifier qu'il pourra prendre un rectangle de 10cm de large à partir de la $2^{ème}$ étape.
c) Leonardo a conçu la fonction ci-contre sur Python.
Que représente le nombre renvoyé par la fonction nombre lorsqu'on prend $A = 550\pi$?

```
def nombre(A) :
    n=0
    L=A/10
    while L>=10 :
        L=L-10
        n=n+1
    return n
```

d) Vérifier que le nombre maximal de pizzas qu'on tirera à cette étape est de 17 mini-pizzas.

3) Etapes suivantes :

A l'aide de la fonction nombre, écrire une fonction « étapes » sur Python qui calcule le nombre d'étapes nécessaires à la fabrication des 100 mini-pizzas avant d'arriver à la dernière pizza. (Lorsqu'il ne restera que de quoi faire 1 pizza, celle-ci sera directement faite de façon circulaire.)

EXERCICE 2 : « L'opérateur triangle » (à traiter par les candidats ayant suivi la spécialité mathématiques)

On rappelle que :

(i) tout nombre n pair s'écrit sous la forme n = 2k où k est un entier

(ii) tout nombre n impair s'écrit sous la forme n = 2k + 1 où k est un entier.

L'opérateur triangle, noté Δ , est défini pour tous entiers *a* et *b* par :

$$a\Delta b = a^2 + 3^b$$

1). Calculer $3\Delta 4$.

2). A-t-on $a\Delta b = b\Delta a$, pour tous les entiers *a* et *b* ?

3). Soient *a, b et c* trois entiers. A-t-on nécessairement $(a\Delta b)\Delta c = a\Delta(b\Delta c)$?

4). Montrer que pour tout entier *a* et pour tout entier négatif *b* non nul, $a\Delta b$ est un rationnel non entier.

5). Existe-t-il deux entiers *a* et *b* tels que $a\Delta b$=10 ?

6). Existe-t-il toujours deux entiers *a* et *b* tels que $a\Delta b = k$, pour n'importe quel entier *k* ?

7)

a. Démontrer que si un entier est pair, son carré est un entier pair.

b. Démontrer que si un entier est impair, son carré est un entier impair.

c. Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

d. Soit *b* un entier positif.3^b est-il toujours pair ? toujours impair ?
Toute tentative d'explication même imparfaite sera valorisée.

e. Soit *b* un entier positif. Donner une condition sur l'entier *a* pour que $a\Delta b$ soit impair.

8). Soit *b* un entier positif.
Donner une condition sur l'entier a pour que $a\Delta b$ soit divisible par 6.

EXERCICES ACADEMIQUES
OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

académie
La Réunion

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

EPREUVE PAR EQUIPE OU INIDIDUELLE-9h-11h

Ce sujet doit être distribué **exclusivement** aux élèves inscrits **en voie technologique**.
(n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques)
Ils traiteront **les exercices 3 et 4**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 11h.

Une pause de dix minutes est prévue avant de distribuer les exercices nationaux.

Le sujet comporte 4 pages (dont la page de garde).

EXERCICE 3

(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques)

Soit le problème suivant : « Quel(s) nombre(s) se cache(nt) derrière ces informations ? :
« un entier naturel N est composé de trois chiffres dont le produit est 120 et la somme 16 »

1. Montrer que N ne contient pas 0.

2. Montrer que N ne contient pas 1.

3. Montrer que N ne contient pas 2.

4. Montrer que N ne contient ni 7, ni 9.

5. Montrer que N ne contient ni 4, ni 6.

6. Déterminer alors tous les nombres N solutions de ce problème.

Exercice 4 : Les mini-Pizzas

(à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques)

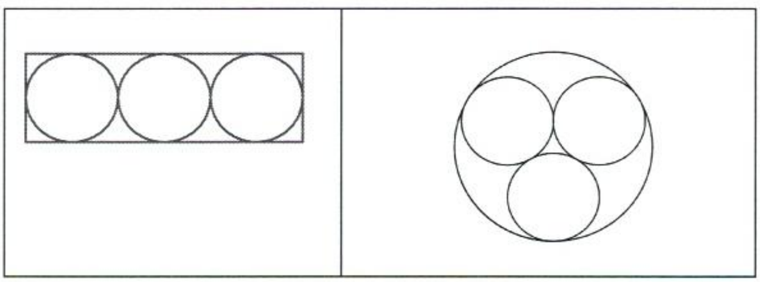
On remarquera que la version de cet exercice est différente de la version proposée aux candidats ayant suivi la spécialité mathématiques.

Leonardo est un pizzaïolo très habile de ses mains. Il arrive à étaler sa pâte de façon parfaitement circulaire, mais aussi sous forme de rectangle de n'importe quelles dimensions.
Leonardo aimerait, pour un buffet, proposer des mini-pizzas rondes qu'il découpera dans sa pâte étalée, à l'aide d'un emporte-pièce de 10cm de diamètre.

Partie 1 : Pour faire 3 mini-pizzas.

Leonardo se demande comment étaler sa pâte pour pouvoir en sortir 3 mini-pizzas avec un minimum de perte.

Il envisage donc les 2 formes qu'il sait faire, et fait les schémas suivants :

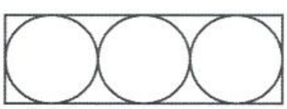


Dans chacun des cas, il souhaite calculer le pourcentage de perte, c'est-à-dire la quantité :

$$P = 100 - \frac{Aire\ des\ trois\ disques}{Aire\ de\ la\ pâte} \times 100$$

(On rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est πr^2)

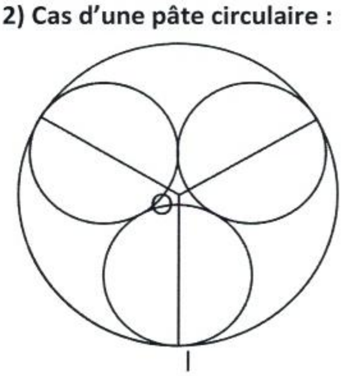
1) Cas d'une pâte rectangulaire :



a) Quelles sont les dimensions du rectangle ci-contre ? **(On rappelle que les cercles font 10 cm de diamètre).**

b) Quel est alors le pourcentage de perte dans le cas d'une pâte rectangulaire ? On arrondira au centième.

2) Cas d'une pâte circulaire :



On admet que dans le cas d'une pâte circulaire Sur le schéma ci-contre, la pâte est un cercle de centre O et de rayon $[OI]$. Les mini-pizzas sont les trois cercles (de **diamètre 10 cm**) dessinés à l'intérieur du cercle de rayon [OI]

On admet que le rayon OI de la pâte circulaire vaut : $\frac{10\sqrt{3}}{3} + 5$, en déduire l'aire du grand disque de pâte.

a) Quel est alors le pourcentage de perte dans le cas de cette pâte circulaire ? On arrondira au centième.

b) Pour faire 3 mini-pizzas, Leonardo doit-il privilégier la forme circulaire ou rectangulaire ?

Partie 2 : Avec 1kg de pâte.

Leonardo a eu une commande de 100 mini-pizzas. Sachant que chacune de ces mini-pizzas pèsera 10g, il fait une boule d'1kg de pâte. Il va l'étaler sur son plan de travail en forme de rectangle, et en sortir le maximum de mini-pizzas de 10cm de diamètre. Puis il recommencera en récupérant à chaque fois les chutes, en faisant le moins d'étapes possibles.

1) **Première étape :**

Leonardo choisit d'étaler sa pâte sous forme d'un rectangle.

a) Montrer que l'aire du rectangle qu'il obtiendra en étalant sa pâte sera de 2500π cm².
b) Le plan de travail de Leonardo est un rectangle de 65cm de large sur 200cm de long. Pourra-t-il y étaler sa pâte ?
c) Leonardo voudrait prendre 30cm de large. Est-ce possible ?

d) Afin d'avoir le moins de pertes possibles, Leonardo voudrait prendre une largeur qui soit un multiple de 10. Déterminer tous les cas possibles et compatibles avec son plan de travail. Vérifier que la configuration la plus rentable permettrait d'obtenir 78 mini-pizzas.

2) **Deuxième étape :**

Leonardo récupère ses chutes après avoir sorti les 78 mini-pizzas à la première étape. Il en fait une boule qu'il va à nouveau étaler de façon à obtenir un rectangle

a) Vérifier que le rectangle obtenu à la 2ème étape aura pour aire 550π cm².
b) Vérifier qu'il pourra prendre un rectangle de 10cm de large pour toutes les étapes suivantes.

c) Leonardo a conçu la fonction ci-contre sur Python.
Que représente le nombre renvoyé par la fonction nombre lorsqu'on prend $A = 550\pi$?

d) Vérifier que le nombre maximal de pizzas qu'on tirera à cette étape est de 17 mini-pizzas.

```
def nombre(A) :
    n=0
    L=A/10
    while L>=10 :
        L=L-10
        n=n+1
    return n
```

3) **Etapes suivantes :**

Recopier et compléter les deux lignes du programme ci-contre, afin qu'il détermine le nombre d'étapes nécessaires à la fabrication des 100 mini-pizzas avant d'arriver à la dernière pizza. (Lorsqu'il ne restera que de quoi faire 1 pizza, celle-ci sera directement faite de façon circulaire.)

```
def etapes() :
    A=550*pi
    N=1
    p=nombre(A)
    while(p>=1):
        p=nombre(A)
        A= ....................
        N= ....................
    return N
```