Olympiades mathématiques de première 2020. Sujet national.

I Exercice pour tous les candidats : batailles navales.

Un joueur effectue une sorte de « bataille navale » sur un damier carré de $n \times n$ cases, avec $n \geqslant 3$. Un bateau est représenté par un rectangle constitué de trois cases de la taille des cases du damier. Il est placé horizontalement ou verticalement sur trois cases du damier.

Le bateau est invisible du joueur.

Le joueur effectue plusieurs tirs sur des cases distinctes du damier dans le but de toucher au moins une des cases occupées par le bateau.

On appelle « jeu optimal » un ensemble de tirs permettant de toucher le bateau à coup sûr, quelle que soit la position occupée par celui-ci, et comprenant le nombre minimal de tirs pour y parvenir.

On note $\mathsf{J}(n)$ le nombre de tirs réalisés dans un jeu optimal. Le but de cet exercice est de déterminer $\mathsf{J}(n)$ et de réaliser un jeu optimal effectif.

Partie A : étude de trois cas particuliers.

0. Cas où $n = 3$.

   (a) Combien de positions différentes le bateau est-il susceptible d'occuper sur le damier ?

   (b) Reproduire le damier sur la copie et indiquer trois cases sur lesquelles tirer pour que le bateau soit touché à coup sûr. On placera une croix ($\times$) dans chacune de ces cases.

   (c) Montrer qu'on ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

   (d) En déduire que $\mathsf{J}(3) = 3$.

1. Cas où $n = 4$.

(a) Sur un damier 4×4, indiquer cinq positions pour le bateau qui n'ont aucune case en commun deux à deux. Que peut-on en déduire pour $\mathsf{J}(4)$?

(b) Représenter un jeu optimal à cinq tirs sur un damier 4×4. En déduire $\mathsf{J}(4)$.

2. Cas où $n = 5$. Montrer que $\mathsf{J}(5) = 8$.

Partie B : cas général.

1. Cas où $n = 3p$, avec p entier et $p \geqslant 1$.

   (a) Indiquer une façon de placer sur le damier un nombre maximal de positions disjointes deux à deux pouvant être occupées par le bateau. Que peut-on dire de $\mathsf{J}(3p)$?

   (b) En utilisant le schéma proposé en A1(b), expliquer comment réaliser un jeu optimal pour $n = 3p$.

   (c) Montrer que $\mathsf{J}(3p) = 3p^2$.

2. Cas où $n = 3p + 1$, avec p entier et $p \geqslant 1$.

   (a) Combien peut-on placer au maximum sur le damier de positions du bateaux disjointes deux à deux ?

   (b) Réaliser un jeu optimal pour $n = 3p + 1$ en expliquant avec précision la démarche.

   (c) Que vaut $\mathsf{J}(3p + 1)$?

3. Recherche d'une caractérisation commune de $\mathsf{J}(n)$, pour tout entier $n \geqslant 3$.
   On traite le cas $n = 3p + 2$ par des raisonnements analogues à ceux des cas $n = 3p$ et $n = 3p + 1$ et on obtient : $\mathsf{J}(3p + 2) = 3p^2 + 4p + 1$.

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $\mathsf{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.

   (b) Existe-t-il un entier n tel que $\mathsf{J}(n) = 2020$?

II Exercice pour les candidats de la voie générale en spécialité mathématiques : ensembles surprenants.

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Dans tout l'exercice, les ensembles considérés sont des sous-ensembles finis non vides de $\mathbb{N}^*$.

Si A est un tel ensemble, on désigne par $P(A)$ le produit des éléments de A et par $C(A)$ la somme des carrés des éléments de A.

Par exemple, si $A = \{1,\ 2,\ 5\}$, alors $P(A) = 1 \times 2 \times 5 = 10$ et $C(A) = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 30$.

On dit qu'un ensemble A fini est *surprenant* si $P(A) = C(A)$.

0. Deux exemples.

   (a) L'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 2020\}$ est-il surprenant ?

   (b) L'ensemble $\{6,\ 15,\ 87\}$ est-il surprenant ?

1. On considère un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geqslant 5$.

   (a) Quels sont les nombres x vérifiant l'égalité
   $$xP(A) = P(A) - 1 + x^2 \ ?$$

   (b) Montrer que le nombre $P(A) - 1$ n'appartient pas à A.

   (c) On note A' l'ensemble obtenu en ajoutant l'entier $P(A) - 1$ à l'ensemble A. En d'autres termes,
   $$A' = A \cup \{P(A) - 1\}\,.$$
   Exprimer $P(A') - C(A')$ en fonction de $P(A) - C(A)$.

   (d) En déduire que si $P(A) > C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

   (e) Trouver un ensemble surprenant contenant l'ensemble $\{3,\ 4,\ 9\}$.

2. On considère à nouveau un sous-ensemble fini A de $\mathbb{N}^*$ tel que $P(A) \geqslant 5$.

   (a) Prouver que le nombre $P(A) - 2$ n'appartient pas à A.

(b) En déduire que si $P(A) < C(A)$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

3. En déduire finalement que, pour tout sous-ensemble fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble surprenant B contenant A.

4. Montrer qu'on peut trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $A = \{1, 2, 5\}$.

III Exercice pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale : mathématiques et cryptographie une longue histoire !

Partie A.

Le chiffre de César ou le chiffrement par décalage est une méthode de chiffrement très simple utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes. Le texte chiffré s'obtient en décalant chaque lettre d'un nombre fixe, appelé clé, dans l'ordre de l'alphabet.

Par exemple avec une clé de 3 vers la droite, A est remplacé par D, B devient E, et ainsi jusqu'à W qui devient Z, puis X devient A etc.

1. Coder le mot suivant avec la clef 3 : OLYMPIADES.

2. Décoder le message suivant, chiffré par la méthode de César avec la clé 9 : JWWNN MNB VJCQNVJCRZDNB.

3. Décoder les trois parties du texte suivant, chiffré par la méthode de César, dont la clé est à deviner :

Texte 1 : signé Alan Turing.

Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *qmppi riyj girx hsydi*, la cryptographie me passionne. Le décodage est simpliste même si *Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx* l'aurait trouvé brillant.

Eper Xyvmrk

Partie B.

Soient a et b deux nombres entiers. Le cryptage affine consiste à remplacer chaque lettre de l'alphabet par un nombre, en commençant par 0 pour la lettre A, 1 pour la lettre B... jusqu'à 25 pour la lettre Z, puis à remplacer le nombre initial x par le nombre y qui est le reste de la division euclidienne de $ax + b$ par 26. Le couple $(a; b)$ forme la clé du cryptage.

1. (a) Avec la clé $(a; b) = (22; 4)$, détailler les calculs pour la lettre B.

   (b) Toujours avec la clé $(a; b) = (22; 4)$, coder les lettres D et Q.

   (c) Quel problème pratique engendre l'utilisation de cette clé ?

2. On change de clé : on prend $(a; b) = (9; 4)$.
   Dans l'algorithme ci-dessous, m % 26 désigne le reste de la division euclidienne de m par 26. par exemple, 28 % 26 = 2.

```
Entrer a
Entrer b
x ← 0
Tant que x < 26
        m ← ax +b
        y ← m % 26
        Afficher x, y
        x ← x + 1
Fin tant que
```

   Cet algorithme permet de remplir le tableau de la question (a).

   (a) Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter pour tout l'alphabet.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	...
Rang x	0	1	2	3	4	5	...	...	...	...
$m = ax + b$	4									
Rang y	4									
En crypté	E									

   (b) La clé $(9; 4)$ résout-elle le problème rencontré à la question 1.(c) ?

   (c) Décoder la partie du texte suivant, codé avec la clé $(a; b) = (9; 4)$.

Texte 2.

Le mot algorithme tire son origine de *Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk*, père de l'algèbre.

3. Proposer un algorithme de décodage. Toute trace de recherche sera prise en compte.

4. Quel est le principal défaut des deux systèmes de codage vus précédemment ?

Partie C.

On peut reprendre le chiffre de César de la partie A en changeant de clé pour chaque lettre. Ce chiffrement le chiffrement de Vigenère, introduit la notion de clé, qui peut se présenter sous forme d'un mot ou d'une phrase. On choisit par exemple le mot clé VIGENERE, ce qui donnera :

— la clé 21 (lettre V) pour la 1$^{\text{re}}$ lettre du message à coder,
— la clé 8 (lettre I) pour la 2$^{\text{e}}$ lettre,
— la clé 6 (lettre G) pour la 3$^{\text{e}}$ lettre, etc...
— la clé 4 (lettre E) pour la 8$^{\text{e}}$ lettre puis on recommence avec la clé 21 (lettre V) pour la 9$^{\text{e}}$ lettre, etc.

1. Décoder avec cette clé la date de naissance de Blaise Vigenère.

Texte 3.

HQRPR GZRL KKRG ZZRBB-ZVBMJ

2. Remplir la frise ci-dessous avec les noms des trois mathématiciens évoqués dans les textes précédents ainsi que leur année de naissance, parfois approximative.