Olympiades mathématiques de première 2020. Sujet national.

I Exercice pour tous les candidats : batailles navales.

Partie A : étude de trois cas particuliers.

0. (a)

1	1	1
2	2	2
3	3	3

et

4	5	6
4	5	6
4	5	6

Le bateau peut occuper 6 positions sur le damier.

(b)

×		
	×	
		×

(c) Le damier comporte 3 colonnes, donc avec 2 tirs une colonne (au moins) est épargnée et si le bateau est placé dans cette colonne il est sauf.

On ne peut pas réaliser un jeu optimal avec deux tirs.

(d) D'après la question 0.(b) $\mathsf{J}(3) \leqslant 3$ et, d'après la question 0.(c), $\mathsf{J}(3) \geqslant 3$. Enfin

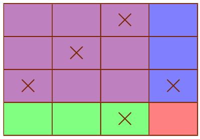
$$\mathsf{J}(3) = 3.$$

1. (a)

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
5	5	5	

Cette configuration montre qu'il ne faut pas moins de 5 tirs pour réaliser un jeu optimal.

$$\mathsf{J}(4) \geqslant 5.$$

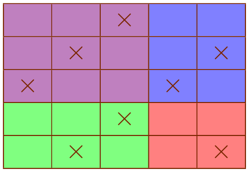
(b) 

De la représentation ci-dessus nous déduisons que $\mathsf{J}(4) \leqslant 5$.

En tenant compte du résultat de la question précédente nous en déduisons :

$$\boxed{\mathsf{J}(4) = 5.}$$

2. En procédant comme précédemment, $\mathsf{J}(5) \leqslant 8$ car



permet de toucher à coup sûr, et $\mathsf{J}(5) \geqslant 8$ car la configuration suivante nécessite au moins 8 tirs :

1	1	1	5	6
2	2	2	5	6
3	4		5	6
3	4	7	7	7
3	4	8	8	8

des deux précédentes inégalités nous déduisons :

$$\boxed{\mathsf{J}(5) = 8.}$$

Partie B : cas général.

1. (a) Dans ce cas il est possible de recouvrir complètement le damier par des bateaux :

1	1	1	2	2	2	...	3	3	3
2	2	2	3	3	3	...	1	1	1
3	3	3	1	1	1	...	2	2	2
1	1	1	2	2	2	...	3	3	3
2	2	2	3	3	3	...	1	1	1
3	3	3	1	1	1	...	2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	2	2	2	...	3	3	3
2	2	2	3	3	3	...	1	1	1
3	3	3	1	1	1	...	2	2	2

Puisque tout les $9p^2$ cases du damier sont recouvertes et que chaque bateau recouvre 3 cases nous avons placé $\frac{9p^2}{3} = 3p^2$ bateaux. Il faudra donc au minimum $3p^2$ coup pour toucher un bateau à coup sûr.

$$\mathsf{J}(3p) \geqslant 3p^2.$$

(b)

		×			×	...			×
	×			×		...		×	
×			×			...	×		
		×			×	...			×
	×			×		...		×	
×			×			...	×		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		×			×	...			×
	×			×		...		×	
×			×			...	×		

Les tirs dessinés ci-dessus permettent à coup sûr de toucher un bateau placé sur le damier. Dénombrons les tirs ainsi dessinés.

Les tirs sont regroupés en petits damiers de taille 3×3 contenant chacun 3 tirs.

Il y a p petits damiers 3×3 alignés et autant superposés en colonnes donc au total il y a $p \times p$ petits damiers 3×3.

Il y a donc $3p^2$ tirs dessinés sur le damier ci-dessus.

$$\mathsf{J}(3p) \leqslant 3p^2.$$

(c) Des deux questions précédentes nous déduisons :

$$\boxed{\mathsf{J}(3p) = 3p^2.}$$

2. (a) Le damier comporte $(3p+1)^2 = 9p^2+6p+1$ cases. Un bateau recouvrant 3 cases, le nombre maximum b de bateau vérifie donc $b \leqslant \frac{9p^2+6p+1}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc : $b \leqslant 3p^2 + 2p$.

En procédant comme précédemment

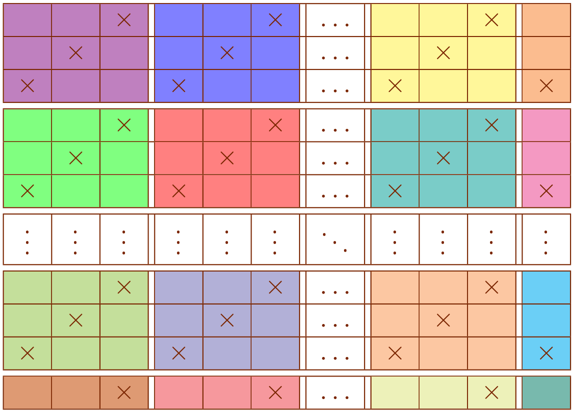
1	1	1	2	2	2	$\dots$	3	3	3	4
2	2	2	3	3	3	$\dots$	1	1	1	4
3	3	3	1	1	1	$\dots$	2	2	2	4
1	1	1	2	2	2	$\dots$	3	3	3	5
2	2	2	3	3	3	$\dots$	1	1	1	5
3	3	3	1	1	1	$\dots$	2	2	2	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	2	2	2	$\dots$	3	3	3	6
2	2	2	3	3	3	$\dots$	1	1	1	6
3	3	3	1	1	1	$\dots$	2	2	2	6
4	4	4	5	5	5	$\dots$	6	6	6	

Au damier de la question précédente qui pouvait contenir $3p^2$ bateaux nous avons rajouté une colonne à droite et une ligne en dessous. Sur cette ligne et cette colonne nous avons dessiné $2 \times p$ bateaux. Le damier contient donc au total $3p^2 + 2p$ bateaux.

Ainsi le damier contient au plus $3p^2 + 2p$ bateaux et nous avons effectivement réussi à en placer $3p^2 + 2p$, autrement dit :

$$\boxed{\text{le nombre maximal de bateaux est } 3p^2 + 2p.}$$

(b) Reprenons les tirs que nous avions obtenus lorsque $n = 3p$ en ajoutant une ligne en dessous et une colonne à droite.



Le damier ci-dessus montre clairement qu'il est impossible de placer un bateau de trois cases qui ne soit pas sur une case de tir.
Sur ce damier sont dessinés les $3p^2$ tirs apparaissant déjà dans le cas $n = 3p$ auxquels s'ajoutent $2p$ tirs dessinés sur les ligne et colonne rajoutées.

D'après la question précédente $\mathsf{J}(3p+1) \geqslant 3p^2 + 2p$ et nous venons d'établir que $\mathsf{J}(3p+1) \leqslant 3p^2 + 2p$. Il est donc impossible d'obtenir des tirs touchant un navire à coup sûr de moins avec moins que $3p^2 + 2p$ tirs.

Le damier ci-dessus correspond à un jeu optimal.

(c) Nous avons établit au cours de la question précédente que

$$\mathsf{J}(3p+1) = 3p^2 + 2p.$$

3. (a) Démontrons par disjonction des cas que, pour tout $n \geqslant 3$, $\mathsf{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.

* Supposons que $n = 3p$ avec $p \in \mathbb{N}$.
  Alors : $\frac{n^2}{3} = \frac{(3p)^2}{3} = 3p^3 = \mathsf{J}(3p)$. Donc $\mathsf{J}(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.
* Supposons que $n = 3p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$.
  Alors : $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$ et $\mathsf{J}(n) = 3p^2 + 2p$.

Donc : $J(n) \leqslant \frac{n^2}{3}$.

De plus $\left|\frac{n^2}{3} - \mathsf{J}(n)\right| = \frac{1}{3} < 1$.

Donc, là encore, $\mathsf{J}(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.

* Supposons que $n = 3p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$.

  Alors : $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3}$ et $\mathsf{J}(n) = 3p^2 + 4p + 1$.

  Donc : $J(n) \leqslant \frac{n^2}{3}$.

  De plus $\left|\frac{n^2}{3} - \mathsf{J}(n)\right| = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} < 1$.

  Donc, là encore, $\mathsf{J}(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.

En réunissant les trois cas :

pour tout entier $n \geqslant 3$, $\mathsf{J}(n)$ est le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{n^2}{3}$.

(b) Pour répondre à cette question il serait naturel de se lancer dans un raisonnement par analyse synthèse, mais ici aucune solution n'existe d'où le choix du raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$ tel que $\mathsf{J}(n) = 2020$ et démontrons que cela conduit à une impossibilité.

Cas 1 : si $n = 3p$ alors $\mathsf{J}(n) = 3p^2$ et donc

$$\mathsf{J}(n) = 2020 \Leftrightarrow 3p^2 = 2020$$

Donc $p \notin \mathbb{N}$ et dans ce cas il n'y a pas d'entier n qui convienne.

Cas 2 : si $n = 3p + 1$, alors $\mathsf{J}(n) = 3p^2 + 2p$ et donc

$$\mathsf{J}(n) = 2020 \Leftrightarrow 3p^2 + 2p - 2020 = 0$$

La résolution de ce dernier trinôme ne conduit à aucune racine entière donc dans ce cas il n'y a pas d'entier n qui convienne.

Cas 3 : si $n = 3p + 1$, alors $\mathsf{J}(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et donc

$$\mathsf{J}(n) = 2020 \Leftrightarrow 3p^2 + 4p - 2019 = 0$$

La résolution de ce dernier trinôme ne conduit à aucune racine entière donc dans ce cas il n'y a pas d'entier n qui convienne.

Dans tous les cas nous obtenons une impossibilité.

Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $\mathsf{J}(n) = 2020$.

II Exercice pour les candidats de la voie générale en spécialité mathématiques : ensembles surprenants.

0. (a)

$$\begin{aligned} P(\{1,\ 2,\ 3,\ 2020\}) &= 1 \times 2 \times 3 \times 2020 \\ &= 12\,120 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} C(\{1,\ 2,\ 3,\ 2020\}) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2020^2 \\ &= 4\,080\,414 \end{aligned}$$

$\{1,\ 2,\ 3,\ 2020\}$ n'est pas surprenant.

(b) $P(\{6,\ 15,\ 87\}) = 7830 = C(\{6,\ 15,\ 87\})$.

$\{6,\ 15,\ 87\}$ est surprenant.

1. (a) Cette égalité permet vraisemblablement de démontrer que $P(A) - 1 \notin A$ mais je ne vois pas comment. Si vous avez une idée envoyez-moi un mail.

$$xP(A) = P(A) - 1 + x^2$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
x^2 - P(A)x + P(A) - 1 &= 0\\
\left(x^2 - 2\frac{P(A)}{2}x + \frac{P(A)^2}{4}\right) - \frac{P(A)^2}{4} + P(A) - 1 &= 0\\
\left(x - \frac{P(A)}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{P(A)}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{P(A)}{2} \times 1 + 1^2\right] &= 0\\
\left(x - \frac{P(A)}{2}\right)^2 - \left(\frac{P(A)}{2} - 1\right)^2 &= 0\\
(x-1)\left[x - (P(A)-1)\right] &= 0\\
x = 1 \quad \text{ou} \quad x = P(A) - 1
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $xP(A) = P(A) - 1 + x^2$ est : $\mathscr{S} = \{1,\ P(A) - 1\}$.

(b) Démontrons que $P(A) - 1 \notin A$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons que $P(A) - 1 \in A$ et démontrons que cela conduit à une contradiction.
Puisque $P(A) - 1 \in A$, $(P(A) - 1)$ divise $P(A)$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(P(A) - 1) = P(A)$ ou encore $n = \frac{P(A)}{P(A)-1}$.
Considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [5; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x-1} \end{array} \right.$.
f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[5; +\infty[$ et ne s'annulant pas sur$[5; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in [5; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x - 1 - x}{(x-1)^2}\\
&= -\frac{1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

et donc :

$$f'(x) < 0$$

Par conséquent f est strictement décroissante et en particulier : de $P(A) \geqslant 5$ nous déduisons $f(P(A)) \leqslant f(5)$.

Autrement dit : $n = f(P(A)) \leqslant \frac{5}{4}$.
Donc, puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $n = 1$. Or dans ce cas $P(A) - 1 = P(A)$ ce qui est impossible.

> Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que $P(A) - 1 \notin A$.

(c)

$$\begin{aligned} P(A') - C(A') &= P(A) \times [P(A) - 1] - \left[C(A) + (P(A) - 1)^2\right] \\ &= P(A)^2 - P(A) - C(A) - P(A)^2 + 2P(A) - 1 \end{aligned}$$

Enfin

> $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1.$

(d) Si $P(A) > C(A)$ alors $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1$ peut s'interpréter en disant que l'écart entre $P(A')$ et $C(A')$ est diminué de 1 par rapport à l'écart entre $P(A)$ et $C(A)$.

Notons $A_0 = A$, $A_1 = A'$, $A_2 = A_1 \cup \{P(A_1) - 1\}$, etc.
D'une part : $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$.
D'autre part, la suite $(P(A_i) - C(A_i))_i$ est une suite arithmétique de premier terme un entier naturel non nul et de raison -1. Il existera donc un rang pour lequel elle vaudra 0 : il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_0 \subset A_{i_0}$ et $P(A_{i_0}) - C(A_{i_0}) = 0$.

> Si $P(A) > C(A)$ il est possible de trouver un ensemble surprenant, B, contenant A.

(e)

Ensemble A	$P(A)$	$C(A)$	$P(A) - 1$
$A_0 = \{3, 4, 9\}$	108	106	107
$A_1 = \{3, 4, 9, 107\}$	11556	11555	11555
$A_2 = \{3, 4, 9, 107, 11555\}$	133529580	133529580	

> $\{3, 4, 9, 107, 11555\}$ est un ensemble surprenant contenant $\{3, 4, 9\}$.

2. (a) Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [5;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x-2} \end{array} \right.$. En procédant comme à la question précédente nous établissons que g est strictement décroissante et comme $P(A) \geqslant 5$ nous en déduisons $g(P(A)) = \frac{P(A)}{P(A)-2} \leqslant \frac{5}{3}$. Or, si $P(A)-2 \in A$ alors $\frac{P(A)}{P(A)-2} \in \mathbb{N}^*$ donc, nécessairement $\frac{P(A)}{P(A)-2} = 1$. Ce qui est impossible.

Nous avons donc établi en raisonnant par l'absurde que :

$$P(A) - 2 \notin A.$$

(b) Notons $A_1 = A \cup \{P(A) - 2\}$.

$$\begin{aligned} P(A_1) - C(A_1) &= (P(A) - 2)P(A) - C(A) - [p(A) - 2]^2 \\ &= P(A)^2 - 2P(A) - C(A) - P(A)^2 + 4P(A) - 4 \\ &= P(A) - C(A) + P(A) + 4 \end{aligned}$$

Or $P(A) - C(A) < 0$ par hypothèse et $P(A) + 4 > 0$ donc :

$$P(A_1) - C(A_1) > P(A) - C(A)$$

En réitérant nous construirions une suite $(A_j)_j$ croissante au sens de l'inclusion : $A = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ et telle que la suite $(P(A_j) - C(A_j))_j$ est strictement croissante.

Ainsi $(P(A_j) - C(A_j))_j$ est une suite strictement croissante d'entiers dont le premier terme est strictement négatif. Il existe donc un rang j_0 tel que $P(A_{j_0}) - C(A_{j_0}) > 0$.

À partir du rang j_0 nous retombons sur le cas étudié à la question 1 et nous pouvons donc affirmer :

Si $P(A) < C(A)$ il est possible de trouver un ensemble surprenant, B, contenant A.

3. Si $5 \in A$, alors $P(A) \geqslant 5$ et nous pouvons utiliser les résultats précédentes. Sinon $P(A \cup \{5\}) \geqslant 5$ et nous pouvons appliquer les résultats précédents au sur-ensemble $A \cup \{5\}$.

Bref, dans tous les cas

il est possible de trouver un ensemble surprenant, B, contenant A.

4. Nous sommes dans le cas $P(A) \geqslant 0$ et $P(A) < C(A)$ (question 2). En effet :

Ensemble A	$P(A)$	$C(A)$	$P(A) - C(A)$
$A_0 = \{1, 2, 5\}$	10	30	-20
$A_1 = \{1, 2, 5, 8\}$	80	94	-14
$A_2 = \{1, 2, 5, 8, 78\}$	6240	6178	62

À partir de A_2 nous sommes dans le cas $P(A) > C(A)$ et en appliquant alors 62 fois le procédé vu à la question 1 nous pouvons construire une suite $A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_{64}$ en ajoutant à chaque étape un élément au précédent ensemble.

Ainsi $A_{64} = \{1, 2, 5, 8, 78, a_1, a_2, \ldots, a_{62}\}$ contient 67 éléments et par construction $P(A_{64}) - C(A_{64}) = 0$.

Il est possible de trouver un ensemble surprenant ayant 67 éléments et contenant $\{1, 2, 5\}$.

III Exercice pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale : mathématiques et cryptographie une longue histoire !

Partie A.

1. Facilitons le déchiffrage en utilisant un tableau (décalage de 3).

Clair	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Chiffré	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
Clair	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Chiffré	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

Le message chiffré est donc : ROBPSLDGHV.

2. Facilitons le déchiffrage en utilisant un tableau (décalage de 9).

Clair	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Chiffré	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v
Clair	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Chiffré	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Le message en clair est : ANNEE DES MATHEMATIQUES.

3. * Il s'agit d'un chiffre de César il faut donc en déterminer la clef. Le message est, nous le savons signe par Alan Turing. En considérant le nombre de lettres dans chaque mot cela signifie que ALAN et chiffré par EPER. En particulier A est chiffré par E.
   La clef est donc 4.
   * Facilitons le déchiffrage en utilisant un tableau (décalage de 4).

Clair	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Chiffré	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
Clair	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Chiffré	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d

qmppi riyj girx hsydi
mille neuf cent douze
Tcxleksvi ri ey wmbmiqi wmigpi ezerx Niwyw Glvmwx
Pythagore ne au sixieme siecle avant Jesus Christ
Eper Xyvmrk
Alan Turing

Partie B.

1. (a) Si la lettre est B alors $x = 2$.
   Donc : $ax + b = 22 \times 2 + 4 = 48$.
   Puisque $48 > 25$ il faut faire la division euclidienne de 48 par 26 :

$$\begin{cases} 48 = 1 \times 26 + 22 \\ 0 \leqslant 22 < 26 \end{cases}$$

   Donc $y = 22$.
   Enfin la vingt-deuxième lettre de l'alphabet est W (en commençant la numérotation par 0).

   Avec la clé $(a; b) = (22; 4)$, la lettre B est chiffré par W.

(b) *

$$\begin{aligned} \text{D} &\to x = 3 \\ &\to ax + b = 22 \times 3 + 4 = 70 \\ &\to y = 18 \quad \text{car } 70 = 2 \times 26 + 18 \\ &\to \text{S} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} \text{Q} &\to x = 16 \\ &\to ax + b = 22 \times 16 + 4 = 356 \\ &\to y = 18 \quad \text{car } 356 = 13 \times 26 + 18 \\ &\to \text{S} \end{aligned}$$

Les lettres D et Q sont codées par la lettre S.

(c) Une même lettre chiffré peut correspondre à plusieurs lettres en clair.

Cette clé rend le message indéchiffrable.

2. (a) En programmant l'algorithme sur la calculatrice nous obtenons les valeurs du tableau.

Par exemple en Python :

```
a=int(input("a=?"))
b=int(input("b=?"))
x=0
while x<26:
    m=a*x+b
    y=m%26
    print("x=",x,"m=",m,"y=",y)
    x=x+1
```

Avec la Texas Instrument :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:A
:Input "A=?",A
:Input "B=?",B
:0→X
:While X<26
:AX+B→M
:reste(M,26)→Y
:Disp X,M,Y
:Pause
:X+1→X
```

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m = ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m = ax + b$	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

(b) La clé $(9; 4)$ résout en effet le problème puisque chaque lettre cryptée ne correspond qu'à une seule lettre en clair.

(c) Grâce au tableau de la question 2.(a) :

Ez-Qpeuebyviy ro or kojt wort scetbo lyrgtk
Al-Khawarizmi ne en sept cent quatre vingts

3.

```
Entrer a
Entrer b
Entrer z
x ← 0
Tant que x < 26
        m ← ax +b
        y ← m % 26
        Si y=z alors
                Afficher x
        x ← x + 1
Fin tant que
```

4. Pour le code César il n'y a que 25 clés possibles. Il est donc aisé de les tester toutes avec un outil informatique.

   Pour le chiffrage affine comme le message chiffré est obtenu avec des restes par division euclidienne par 26, il n'y a que 26 valeurs possible pour a et pour b (et encore nous avons vu que toutes ne fonctionnent pas à la question B.1.(b).). Là encore cela correspond pas à un grand nombre de possibilité à vérifier, du moins pour un ordinateur.

   Les deux précédents chiffrages résistent mal à une attaque par brute force (essayer toutes les possibilités).

Partie C.

1.

Crypté	H	Q	R	P	R	G	Z	R	L	K	K	R
Clef	V	I	G	E	N	E	R	E	V	I	G	E
Décalage	-21	-8	-6	-4	-13	-4	-17	-4	-21	-8	-6	-4
Clair	M	I	L	L	E	C	I	N	Q	C	E	N

Crypté	G	Z	Z	R	B	B	Z	V	B	M	J
Clef	N	E	R	E	V	I	G	E	N	E	R
Décalage	-13	-4	-17	-4	-21	-8	-6	-4	-13	-4	-17
Clair	T	V	I	N	G	T	T	R	O	I	S

HQRPR GZRL KKRG ZZRBB-ZVBMJ
MILLE CINQ CENT VINGT-TROIS.

2.