Olympiades nationales de mathématiques 2020

Amériques-Antilles-Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

L'oiseau et le cerf-volant

1. Réalisation de la figure
À partir du segment [AB] tracé sur la feuille annexe :
- tracer le point C tel que dans le triangle ABC, l'angle en A vaut 30° et l'angle en B vaut 45° ;
- tracer le point D, symétrique du point C par rapport au segment [AB] ;
- noter H le point d'intersection des segments [AB] et [CD] ;
- noter E le point d'intersection des droites (AC) et (BD) ;
- noter F le point d'intersection des droites (AD) et (BC) ;
- tracer le triangle AEF ;
- à partir du point I milieu de [EF], tracer les segments [IC] et [ID] qui coupent respectivement les segments [BE] et [BF] en J et K.

Le cerf-volant est le quadrilatère ACBD et l'oiseau est le polygone AEJIKF.

On pose AB = 1.

2. On cherche les dimensions du cerf-volant ACBD.
a. Déterminer la nature des triangles ACD et BCD.
b. Déterminer AH et CH en fonction de AC pour en déduire AC puis BC.
c. En déduire l'aire S et le périmètre P de ce cerf-volant.

3. On cherche quelques dimensions de l'oiseau AEJIKF.
a. Déterminer la nature des triangles AEF et BEF.
b. Démontrer que AE = $1+\sqrt{3}$; en déduire CE.
c. Calculer BE.

4. On « décore » le cerf-volant en dessinant son cercle inscrit noté (C).
On dit qu'un cercle est inscrit dans un polygone si ce cercle est tangent à tous les côtés de ce polygone.
On admet la propriété :
Un quadrilatère MNPQ *possède un cercle inscrit si, et seulement si,* MN + PQ = MQ +NP .
a. Pourquoi le cerf-volant ACBD possède-t-il un cercle inscrit ?
On note S l'aire du cerf-volant et P son périmètre.
Le rayon R du cercle inscrit (C) est donné par $R=\frac{2S}{P}$. Calculer R.
b. Déterminer la distance AG où G est le centre du cercle inscrit (C) en admettant que G est sur le segment [AB].
c. Placer le point P tel que B soit le milieu de [AP] puis calculer la distance CP.
d. En déduire alors une construction du point G, centre du cercle inscrit (C).
e. Construire le cercle inscrit (C).

5. On « décore » l'oiseau en dessinant le cercle inscrit (C') du triangle BCE.
a. Déterminer l'aire S' et le périmètre P' du triangle BCE.
b. Calculer le rayon R' du cercle inscrit (C') du triangle BCE en admettant que l'on a $R'=\frac{2S'}{P'}$.
c. Comment construire le centre de ce cercle (C') sans aucun calcul ?

6. Terminer le dessin en construisant le cercle (C') ainsi que son symétrique par rapport à la droite (AB).

Annexe

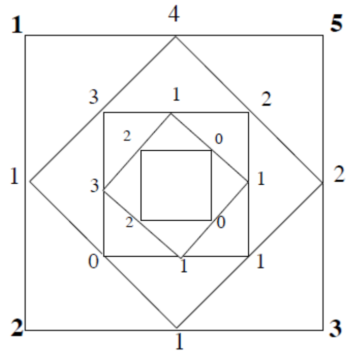
Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Le jeu des 4 nombres

Notation

Soit x un nombre réel, on rappelle que la *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est définie de la façon suivante :
$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.
Par exemple, $|2| = 2$, $|-3| = 3$, $|2-3| = |-1| = 1$

Introduction



On choisit quatre nombres entiers naturels, par exemple 1, 5, 3 et 2. On place ces nombres sur les sommets d'un carré en suivant le sens des aiguilles d'une montre. Au milieu de chaque côté, on inscrit la valeur absolue de la différence des nombres placés aux extrémités de ce côté. Cette opération engendre une nouvelle liste de quatre entiers naturels, placés aux quatre sommets d'un nouveau carré plus petit. On répète ensuite cette opération.

On a représenté ci-contre les quatre premières étapes.

Si on note $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le quadruplet d'entiers initial, le quadruplet obtenu après une opération est appelé *quadruplet dérivé* et est noté $Q^{(1)}$. Le quadruplet dérivé de $Q^{(1)}$ est noté $Q^{(2)}$, le quadruplet dérivé de $Q^{(2)}$ sera noté $Q^{(3)}$, etc.

Dans l'exemple ci-dessus, on a $Q^{(0)} = (1, 5, 3, 2)$; $Q^{(1)} = (4, 2, 1, 1)$; $Q^{(2)} = (2, 1, 0, 3)$; $Q^{(3)} = (1, 1, 3, 1)$; $Q^{(4)} = (0, 2, 2, 0)$; $Q^{(5)} = (2, 0, 2, 0)$; $Q^{(6)} = (2, 2, 2, 2)$; $Q^{(7)} = (0, 0, 0, 0)$.

Première partie

1. Déterminer les quadruplets successifs obtenus en partant de $Q^{(0)} = (2, 5, 9, 16)$ et $Q^{(0)} = (1, 2, 2, 5)$

2. Déterminer un quadruplet de nombres entiers tel que l'on obtienne quatre zéros au bout de
a. 1 étape **b.** 2 étapes **c.** 3 étapes **d)** 8 étapes
Dans ces exemples on obtient 4 zéros au bout d'un nombre fini d'étapes.
On admet dans cette partie que c'est effectivement le cas quel que soit le quadruplet initial choisi ; la démonstration de ce résultat fera l'objet de la seconde partie.

3. On considère $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$. Déterminer une expression de $Q^{(1)}$ en fonction de a, b, c, d .
4. Démontrer qu'il n'existe pas de quadruplet $Q^{(0)}$ de quatre entiers dont (1, 8, 21, 45) soit le dérivé.
5. On appelle *temps de vol* du quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre quatre zéros. Par exemple, le temps de vol de $(1, 5, 3, 2)$ est égal à 7.
Rédiger un algorithme qui réalise les tâches suivantes :
   - obtention du temps de vol maximal d'un quadruplet (a, b, c, d) de 4 entiers compris entre 0 et 99
   - obtention d'un quadruplet possédant ce temps de vol.

Seconde partie

On démontre dans cette partie que pour tout quadruplet d'entiers naturels on obtient quatre zéros en un nombre fini d'étapes.

1. Soit (a, b, c, d) un quadruplet d'entiers naturels.

a. Démontrer que si $Q^{(i)} = (a, b, c, d)$, alors l'un au moins des quadruplets $Q^{(i)}$, $Q^{(i+1)}$, $Q^{(i+2)}$, $Q^{(i+3)}$ ou $Q^{(i+4)}$ est composé de quatre entiers pairs.

b. Démontrer que si le quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ admet comme temps de vol l'entier i, alors il en est de même du quadruplet $(2a, 2b, 2c, 2d)$.

2. Pour tout quadruplet $Q = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, on note $\max Q$ le plus grand des entiers a, b, c, d .

a. Démontrer que pour tout entier naturel i, on a : $\max\ Q^{(i+1)} \leq \max\ Q^{(i)}$

b. Est-il vrai que pour tout entier naturel i tel que $Q^{(i)} \neq (0, 0, 0, 0)$, on a : $\max\ Q^{(i+1)} < \max\ Q^{(i)}$?

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout quadruplet $Q^{(0)} = (a, b, c, d)$ d'entiers naturels, il existe un entier i tel que $Q^{(i)} = (0, 0, 0, 0)$. *Pour répondre à cette question, on pourra utiliser le fait qu'il n'existe pas de suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante.*

Troisième partie

1. On s'intéresse aux cas où l'on part d'un quadruplet de nombres non nécessairement entiers. Déterminer les quadruplets successifs en partant de $Q^{(0)} = (0, 1, 6, \pi)$.

2. On admet l'existence d'un réel de $]1; 2[$ noté q tel que $q^3 - q^2 - q - 1 = 0$. Montrer qu'en partant de $Q^{(0)} = (1, q, q^2, q^3)$ on n'obtient pas quatre zéros en un nombre fini d'étapes. Que peut-on cependant remarquer ?

Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Les nombres palindromes

Un nombre palindrome est un entier naturel non nul qui peut se lire de la même manière de gauche à droite ou de droite à gauche comme par exemple 78987 ou encore 123321.

Partie A : Généralités

1.

a. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 2 chiffres ? Justifier.

b. Combien existe-t-il de nombres palindromes à 3 chiffres ? Justifier.

c. Déterminer le nombre de nombres palindromes à 241 chiffres.

2.

a. Donner deux nombres palindromes à 11 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

b. Donner deux nombres palindromes à 12 chiffres comportant chacun au moins deux chiffres différents.

3. Pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leq x$.
On admet que pour entier naturel $n < 10000$, écrit $n = 1000a + 100b + 10c + d$ (écriture décimale où a, b, c, d sont des entiers compris entre 0 et 9) :

- le chiffre des milliers de n est $a = E(n/1000)$;
- le chiffre des centaines de n est $b = E((n - 1000a)\ /100)$;
- le chiffre des dizaines de n est $c = E((n - 1000a - 100b)/10)$;
- le chiffre des unités de n est $d = n - 1000a - 100b - 10c$.

En utilisant la fonction partie entière, donner un algorithme permettant de déterminer si un entier à 4 chiffres est un palindrome (on pourra utiliser la fonction partie entière).

a. On rappelle que l'écart entre deux nombres réels x et y, quand $x < y$, est le réel positif $y - x$.
Donner l'écart entre les nombres proposés en 2a)

b. Donner un exemple de nombres palindromes distincts à 4 chiffres, d'écart 11.

c. Démontrer que 11 est l'écart minimal entre deux nombres palindromes distincts à 4 chiffres.

Partie B : Nombres palindromes et divisibilité par 11

Dans cette partie, on souhaite étudier et démontrer la propriété suivante.

Tout nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

1.

a. Démontrer que le nombre palindrome 123321 s'écrit sous la forme
$a_0 \times 11 + a_1 \times 1001 + a_2 \times 100001$ où on déterminera les entiers naturels a_0, a_1et a_2.

b. Montrer que 123321 est divisible par 11.

2. On définit $N_k = 1 + 10^{2k+1}$ où k est un nombre entier naturel.
On admet que pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, on a

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

a. Montrer que $N_k$est divisible par 11.

b. En déduire que si un entier naturel est un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11.

c. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?