Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EXERCICES ACADEMIQUES

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

académie
La Réunion

RÉGION ACADÉMIQUE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

EPREUVE PAR EQUIPE-9h-11h

Les candidats de la série S traiteront les exercice 1 et 2

Les candidats des autres séries traiteront les exercices 3 et 4

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus avec la copie à 11h-

Une pause de dix minutes avant de distribuer les exercices nationaux

EXERCICE 1 : Énigmes à deux personnages (pour les S)

On étudie ici des problèmes où l'on confie à deux personnages une information différente sur un nombre entier secret noté N. Ils n'ont pas le droit de partager les informations qu'ils ont reçues. Ces deux personnages sont supposés être de parfaits mathématiciens et de parfaits calculateurs. Par conséquent lorsqu'ils déclarent ne pas connaître l'entier N, c'est qu'aucun raisonnement correct ne leur aurait permis de le connaître.
Les tableaux et algorithmes à compléter seront directement remplis sur la dernière page du sujet que vous remettrez avec votre copie.

Rappels.

- Pour a et N entiers naturels non nuls, on dit que a divise N s'il existe un entier b tel que N = ab.
- Un entier n>1 est dit premier s'il n'est divisible que par lui-même et par 1.
- Par convention 1 n'est pas premier.

1) Un problème sur les diviseurs

On choisit secrètement un nombre entier N entre 2 et 12 puis :
- on communique à Albert la somme de tous les diviseurs de N;
- on communique à Bruno le plus grand diviseur premier de N.

Après leur avoir laissé un temps de réflexion suffisant, on leur demande indépendamment s'ils connaissent la valeur de N, tous deux déclarent : <<impossible pour moi de savoir ce que vaut N>>.
(a) Remplir le tableau suivant. Trois lignes de ce tableau ont déjà été remplies, à titre d'exemple.

N	Diviseurs de N	Nombre de diviseurs	Somme des diviseurs	Plus grand diviseur premier
2				
3				
4				
5				
6	1,2,3,6	4	12	3
7				
8				
9	1,3,9	3	13	3
10				
11	1,11	2	12	11
12				

(b) Que peut-on déduire, concernant la valeur de N, du fait qu'Albert ne connaisse pas la valeur de N ?
(c) En déduire la valeur de N, en utilisant le fait que Bruno ne connaisse pas non plus la valeur de N.

2) Une variante du problème précédent

On choisit cette fois un entier N **entre 2 et 20** puis on donne à Albert et Bruno la même information que dans la partie (1). Après un temps de réflexion suffisant, Albert déclare <<je ne connais pas la valeur de N>>. S'écoule alors encore un temps de réflexion et Bruno déclare, en ayant pris en compte la déclaration d'Albert, <<moi non plus>>.
Le but du problème est de **déterminer le nombre de diviseurs de N**.
(a) Pour étendre la colonne <<nombre de diviseurs>> du tableau précédent jusqu'à la valeur N=20, on souhaite appliquer un algorithme. Compléter :

```
Pour N de 13 à 20,
  nbdiv = 0
  Pour k entre ..... et .....
    Si ..... divise .....
      nbdiv ← nbdiv + 1
  Afficher nbdiv
```

(b) Pour étendre la colonne <<somme des diviseurs>> jusqu'à la valeur N=20, on souhaite également appliquer un algorithme. Compléter :

```
Pour N de 13 à 20,
  S = 0
  Pour k entre ..... et .....
    Si ..... divise .....
      S ← S + .....
  Afficher S
```

(c) On exécute ces algorithmes et on donne le tableau suivant :

N	Diviseurs	Nombre de diviseurs	Somme des diviseurs	Plus grand diviseur premier
13	1,13	2	14	13
14	1,2,7,14	4	24	7
15	1,3,5,15	4	24	5
16	1,2,4,8,16	5	31	2
17	1,17	2	18	17
18	1,2,3,6,9,18	6	39	3
19	1,19	2	20	19
20	1,2,4,5,10,20	6	42	5

En utilisant la déclaration d'Albert, quelles sont les valeurs de N possibles ?
(d) En utilisant maintenant la déclaration de Bruno, donner en justifiant le plus grand diviseur premier de N ainsi que les deux valeurs possibles de N.
(e) Conclure sur le problème posé.

3) Reste par 3 et reste par 5

On choisit secrètement un entier N dans la liste L=(0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10), puis on communique :
- à Albert la valeur du reste de la division de N par 5 ;
- à Bruno la valeur du reste de la division de N par 3.

Ils tiennent alors le dialogue suivant :
Albert - Je ne connais pas la valeur de N.
Bruno - Avant même que vous ne le disiez, je savais déjà que vous ne connaissiez pas N.
Albert - Eh bien alors, maintenant, je connais la valeur de N.
Bruno - Eh bien alors, moi aussi maintenant, je connais la valeur de N.

(a) Placer les valeurs N de la liste L dans les cases du tableau à double entrée suivant, où les lignes 0,1,2 correspondent au reste dans la division de N par 3 et les colonnes 0,1,2,3,4 correspondent au reste dans la division de N par 5 :

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					

(b) Déterminer la valeur de N. On détaillera les étapes du raisonnement, en précisant les valeurs qui peuvent être éliminées avec chaque réplique du dialogue, et en expliquant pourquoi.

ANNEXE. A remettre avec la copie.

Question 1 (a)

N	Diviseurs de N	Nombre de diviseurs	Somme des diviseurs	Plus grand diviseur premier
2				
3				
4				
5				
6	1,2,3,6	4	12	3
7				
8				
9	1,3,9	3	13	3
10				
11	1,11	2	12	11
12				

Question 2 (a)

```
Pour N de 13 à 20,
    nbdiv = 0
    Pour k entre ..... et .....
        Si ..... divise .....
            nbdiv ← nbdiv + 1
    Afficher nbdiv
```

Question 2 (b)

```
Pour N de 13 à 20,
    S = 0
    Pour k entre ..... et .....
        Si ..... divise .....
            S ← S + .....
    Afficher S
```

Question 3 (a)

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					

EXERCICE 2 : Chaîne de nombres (pour les S)

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 66) et multiplions les deux chiffres qui le composent ($6 \times 6 = 36$). Si nous obtenons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$66 \longrightarrow 36 \longrightarrow 18 \longrightarrow 8. \qquad (1)$$

Dans notre exemple, le nombre 66 mène à 8, on dira alors que 66 est un *antécédent* de 8 et que 8 est la *finalité* de 66 (ici, 8 est également la finalité de 36 et 18).
Enfin, on parlera de *chaîne* pour indiquer la suite de nombres obtenue (voir exemple (1)).

1. Établir la chaîne qui commence par 87.

2. Montrer que si le chiffre 0 ou le chiffre 1 figure dans le nombre de départ, la chaîne s'arrête au bout d'une étape.

3. Montrer que pour tout nombre composé du chiffre 5 et d'un chiffre pair, la finalité est 0.

4. a) Montrer que pour tout chiffre a et b,

$$a \times b < 10 \times a + b.$$

   b) Que peut-on en déduire pour deux nombres successifs dans une chaîne ?

   c) Expliquer pourquoi tout nombre entre 10 et 99 possède une finalité.

5. a) Trouver deux antécédents de 7 compris entre 10 et 99.

   b) Montrer que ce sont les seuls antécédents de 7.

6. Quels sont les antécédents de 5 ?

7. Est-ce que tous les chiffres de 0 à 9 ont le même nombre d'antécédents ?

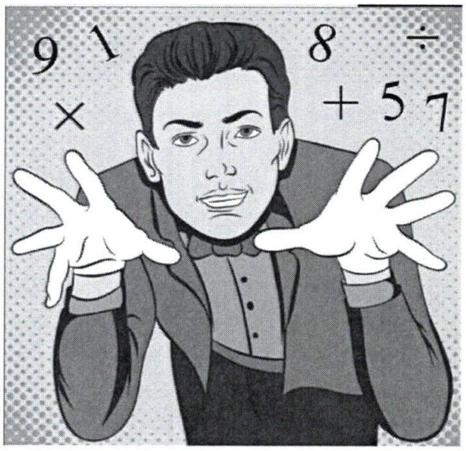
Exercice 3 : Le mathémagicien (pour les non S)

Le but de ce problème est de percer les mystères des trois tours suivants. Ceux-ci sont indépendants.

1er tour :

- **Choisissez un nombre de 3 chiffres distincts.**
- Retournez-le (par exemple si vous retournez 092, vous obtenez 290). Calculez alors la différence entre le nombre et son retourné (en faisant le plus grand moins le plus petit).
- Additionnez à présent le nombre que vous venez de calculer et son retourné.

Grâce à mes pouvoirs mathémagiques, je vais lire dans vos pensées, vous avez trouvé 1089 !



1) Suivez les instructions du mathémagicien. En détaillant sur la copie les étapes, vérifiez que le tour a marché.
2) Le but de cette question est de justifier qu'on trouvera toujours 1089.

On rappelle que tout nombre de 3 chiffres peut s'écrire soit sous forme décimale cdu , soit sous forme de somme $100c + 10d + u$, où u est le chiffre de ses unités, d le chiffres des dizaines, et c le chiffres de ses centaines.

Exemple : $297 = 100 \times 2 + 10 \times 9 + 7$

On note x **le plus grand nombre** entre le nombre choisi et le nombre retourné.

On a donc : $$x = 100c + 10d + u$$

a) Combien vaut alors le retourné de x ?
b) Justifier que $c > u$.
c) Démontrer que la différence du nombre et de son retourné vaut $99(c - u)$.
d) Quelles sont les valeurs possibles de $c - u$?
e) En déduire que dans tous les cas, la différence admet une écriture décimale de la forme $\alpha 9 \beta$, avec $\alpha + \beta = 9$.
f) Expliquer alors le tour.

$2^{\text{ème}}$ tour :

A chaque billet de banque est un attribué un code unique, composé de deux lettres suivies de 10 chiffres.

Prenez un billet de banque, pliez-le en 2 et cachez avec votre doigt le dernier chiffre du code inscrit sur le billet de banque.

Grâce à mes pouvoirs mathémagiques, je vais deviner le chiffre caché.

Exemple 1 :

Explication : Le dernier chiffre noté sur un billet est ce qu'on appelle la clef de contrôle. Sa valeur est comprise entre 1 et 9. Si on remplace dans le code les deux lettres par le nombre correspondant à leur rang dans l'alphabet, la somme des chiffres du nombre obtenu aura toujours pour reste 7 dans sa division euclidienne par 9.

Ainsi, pour l'exemple 1 du billet de 5€ ci-dessus, en remplaçant V par 22, puisque c'est la 22ème lettre de l'alphabet, et A par 1, puisque c'est la 1ère lettre de l'alphabet, on obtient la somme :

$$2+2+1+7+0+7+0+9+9+8+8+0+8=9\times 6+7$$

A vous de jouer, avec vos pouvoirs mathémagiques, trouvez le chiffre caché dans le billet de 100€ de l'exemple 2 ci-contre.

Exemple 2 :

$3^{\text{ème}}$ tour :

Choisissez un nombre comportant 9 chiffres.
Donnez-moi la somme du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$, puis du $2^{\text{ème}}$ et du $3^{\text{ème}}$, puis du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$, et ainsi de suite jusqu'à la somme du $8^{\text{ème}}$ et du $9^{\text{ème}}$. Pour finir donnez-moi la somme du $9^{\text{ème}}$ et du 1^{er}. Je vous redonnerai alors tous les chiffres de votre nombre de 9 chiffres.

On note $a_1;\ a_2; \dots;\ a_9$ les 9 chiffres du nombre choisi, et $b_1;\ b_2; \dots;\ b_9$ les nombres successivement demandés par le magicien.

1. Exemple : si nous choisissons le nombre 569987532,

   On note $a_1 = 5$; $a_2 = 6$; $a_3 = 9$; $a_4 = 9$; .... ; $a_9 = 2$

   Dans ce cas, combien valent les nombres $b_1;\ b_2; \dots;\ b_9$?

2. De façon générale :
   a) Exprimer chaque valeur $b_1;\ b_2; \dots;\ b_9$ en fonction des valeurs $a_1;\ a_2; \dots;\ a_9$.

   b) Combien vaut le nombre : $B = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + b_7 - b_8 + b_9$?

   c) En déduire un moyen de retrouver les différents chiffres du nombre de départ.

3. Exemple :
   La personne donne successivement les sommes suivantes au magicien :
   10 ; 12 ; 13 ; 12 ; 13 ; 12 ; 7 ; 1 ; 8.
   Quel était le nombre de départ ?

4. Sur son site, le mathémagicien souhaite défier en ligne les internautes à ce tour.
   Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche le nombre choisi par l'internaute :

Afficher : « Choisissez un nombre comportant 9 chiffres.
Donnez-moi la somme du 1^{er} et du $2^{\text{ème}}$, puis du $2^{\text{ème}}$ et du $3^{\text{ème}}$, puis du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$, et ainsi de suite jusqu'à la somme du $8^{\text{ème}}$ et du $9^{\text{ème}}$. Pour finir donnez-moi la somme du $9^{\text{ème}}$ et du 1^{er} »

Saisir $b_1;\ b_2; \dots;\ b_9$
$a_1 \leftarrow$
$a_2 \leftarrow$
$a_3 \leftarrow$
$a_4 \leftarrow$
$a_5 \leftarrow$
$a_6 \leftarrow$
$a_7 \leftarrow$
$a_8 \leftarrow$
$a_9 \leftarrow$

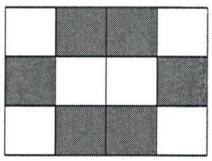
Afficher : « Voici les chiffres correspondant au nombre que vous avez choisi » :
Afficher $a_1;\ a_2; \dots;\ a_9$.

EXERCICE 4 :Image compressée (pour les non S)

Considérons une image numérique sur un écran d'ordinateur représentée par une mosaïque de pixels soit noirs soit blancs.

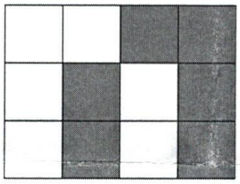
A) Partie A :

On peut coder une image en associant à chaque pixel un 0 ou un 1 selon que le pixel est respectivement blanc ou noir et en lisant ligne par ligne la mosaïque, de haut en bas et de la gauche vers la droite.
On utilise ainsi 12 chiffres pour coder une image de taille 4 x 3 pixels.
Exemple :



0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0

1) Comment code-t-on l'image ci-dessous ?



2) A quelle image correspond le code `100101101001` ? (Colorier la figure en annexe).

3) Combien y a-t-il d'images différentes de taille 4 x 3 pixels ?

4) Combien y a-t-il d'images de taille 4 x 3 pixels contenant exactement 1 pixel noir ?

B) Partie B :

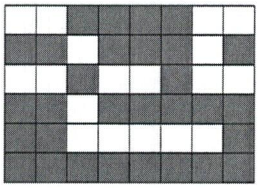
On cherche à coder maintenant une image de taille 8 x 6 pixels.

On dispose désormais des chiffres de 0 à 9 afin de coder une image en comptant le nombre de pixels noirs et blancs successifs et en utilisant un minimum de chiffres.

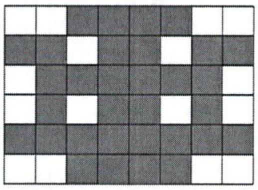
On se met d'accord sur les règles suivantes :

- on lit la mosaïque ligne par ligne, de haut en bas et de la gauche vers la droite.
- on commence toujours par donner le nombre de pixels blancs successifs donc si la mosaïque commence par un pixel noir, le code commencera par 0 .
- on donne toujours le nombre maximal de pixels de la même couleur successifs, donc s'il y a un nombre de pixels successifs de la même couleur supérieur à 9, on codera d'abord en utilisant un 9 puis un 0 pour signifier qu'on ne change pas de couleur, puis avec le chiffre qui complète le nombre de ces pixels, en recommençant éventuellement si ce nombre est encore supérieur à 9 .

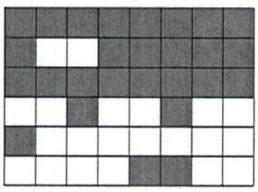
voici quelques exemples pour illustrer les règles décrites précédemment :



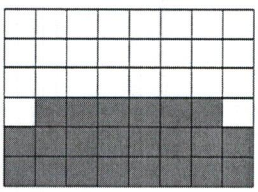
2	4	2	2	1	3	1	1	2	1	2	1	2	2	1	7	5	9



2	4	2	2	1	2	1	2	1	6	2	1	1	2	1	1	1	8	2	4	2

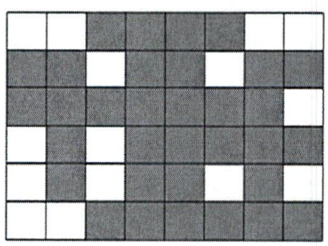


0	9	2	9	0	4	2	1	2	1	2	1	9	0	2	2	2



9	0	9	0	7	6	1	9	0	7

5) A l'aide des exemples précédents, utiliser cette méthode pour coder l'image suivante :



6) A quelle image correspond le code 243132111115221216342 ? (Colorier la figure en annexe).

7) Quel est le nombre minimal de chiffres utilisés pour coder une image ? Donner un exemple en coloriant la figure en annexe.

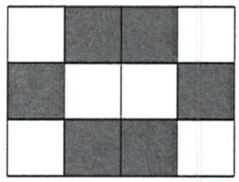
8) De combien de chiffres au maximum va-t-on avoir besoin pour coder une image avec cette méthode ? Donner un exemple en coloriant la figure en annexe.

C) Partie C : Ecriture d'un nombre en base 2

On peut associer à une suite de 0 et de 1 un nombre entier en faisant correspondre chaque nombre de **la droite vers la gauche** à une puissance de 2 en partant de 2^0 et en additionnant ces puissances de 2 . C'est ce qu'on appelle la numération binaire.

Exemple : **1101** correspond à **1**$\times 2^3$+ **1**$\times 2^2$+ **0**$\times 2^1$+ **1**$\times 2^0$=13.

Si l'on reprend la méthode utilisée dans la partie 1, en utilisant les chiffres 0 et 1 , comme ci-dessous,



0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0

le code **011010010110** (qui peut s'écrire aussi **11010010110**) peut donc être associé au nombre 1686 car $2^{10}+2^9+2^7+2^4+2^2+2^1=1024+512+128+16+4+1=1686$.

L'image précédente peut donc être codée par le nombre entier 1686.

Dans la suite de l'exercice, on notera en gras les nombres écrits en utilisant la numération binaire.
On pourra pour la suite s'aider du tableau suivant donnant les premières puissances de 2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

9) A quel nombre entier correspond le code **110** ?

10) Comment écrire le nombre entier 18 en utilisant la numération binaire ?

11) A quelle image correspond le nombre entier 18 ? (Colorier la figure en annexe).

12) A quel nombre entier correspond le code **101101100110** ?

13) Comment écrire le nombre entier 2065 en utilisant la numération binaire ?

14) A quelle image correspond le nombre entier 2065 ? (Colorier la figure en annexe).

15) Utiliser cette nouvelle méthode pour coder l'image de la partie A :