Olympiades mathématiques de première 2019. Sujet national.

I Exercice pour tous les candidats.

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.

On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. (a) Parmi les triplets (x,y,z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

$$(4,4,5); \quad (3,6,9); \quad (2,2,6).$$

   (b) Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $15,19,z)$ désigne les trois côtés d'un triangle non aplati rangés dans l'ordre croissant (soit : $z \geqslant 19$) ?

   (c) Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leqslant y \leqslant z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x,y,z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leqslant y \leqslant z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égale à p.
   Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1,4,4),(2,3,4),(3,3,3)\}$.

   (a) Si le triplet (x,y,z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?

   (b) Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des points de coordonnées (x,y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x,y,z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. (a) Justifier que si $(x,y,z) \in E_p$ alors $(x+1,y+1,z+1) \in E_{p+3}$.

   (b) Soit $(x,y,z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x-1,y-1,z-1) \in E_p$.

   (c) En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.

   (a) $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x,y,z) correspondant à un triangle équilatéral ?

   (b) $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x,y,z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?

   (c) Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x,y,z) correspondant à un triangle rectangle alors $2\,019^2 = 4\,038(x+y) - 2xy$.
   En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

   (a) Soit $x \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leqslant y \leqslant z$. Établir que $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$.

   (b) Réciproquement, montrer que si $x \leqslant y$, $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$ alors $(x,y,2\,022-x-y) \in E_{2\,022}$.

   (c) Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x,y) telles que $x \leqslant y$, $x+y \geqslant 1\,012$ et $x+2y \leqslant 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui es rectangle ? En déterminer l'aire $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

   (d) On admet le théorème de Pick : « Si polygone **P** est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathscr{A}$ est donné par la formule $\mathscr{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\mathbb{P}$ et j est le nombre de ceux situés sur les côtés de **P**. »
   En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.
   De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

II Exercice pour la série S.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition *en produit de facteurs premiers* :

pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k)$ et une liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}.$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^3$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur l'ensemble des nombres entiers naturels.

On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :

Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 1$;

Propriété (2) : Pour tout nombre premier p, $\Delta(p) = 1$;

Propriété (3) : Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose en questions 1, 2 et 3 qu'une telle fonction Δ existe.

1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?

   *

   $$\Delta(p^2) = \Delta(p \times p)$$

   D'après (3) :

   $$\Delta(p^2) = \Delta(p) \times p + p \times \Delta(p)$$

   D'après (2) :

   $$\Delta(p^2) = 1 \times p + p \times 1$$

   $$\boxed{\Delta(p^2) = 2p.}$$

*

$$\begin{aligned}\Delta(p^3) &= \Delta(p^2 \times p)\\ &= \Delta(p^2) \times p + p^2 \times \Delta(p)\end{aligned}$$

De ce qui précède nous déduisons et de (2) :

$$\begin{aligned}\Delta(p^3) &= 2p \times p + p^2 \times 1\\ &= 2p^2 + p^2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\Delta(p^3) = 3p^2.}$$

* Soit p un nombre premier.
Notons $\mathscr{P}(n)$: « $\Delta(p^n) = np^{n-1}$ » pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n entier naturel non nul.

- Initialisation.
  $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1 = 1 \times p^0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit n$\in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors nécessairement vraie.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p^n \times p)$$

Daprès (3) :

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p^n) \times p + p^n \times \Delta(p)$$

D'après l'hypothèse de récurrence et (2) :

$$\begin{aligned}\Delta(p^{n+1}) &= np^{n-1} \times p + p^n \times 1\\ &= np^n + p^n\\ &= (n+1)p^n\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(p^n) = np^{n-1}.}$$

2. (a) Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?

Daprès (3) :

$$\Delta(p^m \times q^n) = \Delta(p^m) \times q^n + p^m \times \Delta(q^n)$$

D'après la question précédnte :

$$\begin{aligned}\Delta(p^m \times q^n) &= mp^{m-1} \times q^n + p^m \times nq^{n-1}\\ &= mp^{m-1} \times q^{n-1} \times q + np \times p^{m-1} \times q^{n-1}\\ &= p^{m-1} \times q^{n-1}\,(mq + np)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta(p^m \times p^n) = p^{m-1}q^{n-1}\,(mq + np).}$$

(b) Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geqslant 1$?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\Delta(10^n) &= 2^{n-1} \times 5^{n-1}\,(n \times 5 + n \times 2)\\ &= n10^{n-1}(2+5)\\ &= n10^{n-1} \times 7\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(10^n) \text{ est un multiple de 7.}}$$

3. À tout nombre entier $n \geqslant 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par p_2, $\ldots$, q_k quotient de n par p_k. Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k.$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\\
&= \Delta(p_1^{\alpha_1}) \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} \times \Delta\left(p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\\
&= \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} \times \Delta\left(p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\\
&= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1} \times \Delta\left(p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)
\end{aligned}$$

De même, en réitérant :

$$\begin{aligned}
&p_1^{\alpha_1} \times \Delta\left(p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\\
&= p_1^{\alpha_1} \times \left[\Delta(p_2^{\alpha_2}) \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_2^{\alpha_2} \times \Delta\left(p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\right]\\
&= \alpha_2 p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2 - 1} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \Delta\left(p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)\\
&= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \Delta\left(p_3^{\alpha_3} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}\right)
\end{aligned}$$

En réitérant, de proche en proche, nous obtiendrions bien

$$\boxed{\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k.}$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée par la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Notons $\varphi(n)$ l'expression trouvée à la question précédente.

* Si $n = p$ un nombre premier alors avec la formule précédente donne $\varphi(n) = \alpha_1 q_1 = 1 \times \frac{n}{p} = 1$. Donc (2) est vérifiée par φ.

* Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et $p_1, p_2, \dots, p_k$ les facteurs premiers de a ou de b et $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ et $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$.
On a donc :

$$ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \times p_2^{\alpha_2+\beta_2} \times p_3^{\alpha_3+\beta_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k+\beta_k}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= (\alpha_1+\beta_1) \times q_{ab,1} + (\alpha_2+\beta_2) \times q_{ab,2} + (\alpha_3+\beta_3) \times q_{ab,3} + \dots \\ &\quad + (\alpha_k+\beta_k) \times q_{ab,k} \\ &= \alpha_1 \times q_{ab,1} + \alpha_2 \times q_{ab,2} + \alpha_3 \times q_{ab,3} + \dots + \alpha_k \times q_{ab,k} \\ &\quad + \beta_1 \times q_{ab,1} + \beta_2 \times q_{ab,2} + \beta_3 \times q_{ab,3} + \dots + \beta_k \times q_{ab,k}\end{aligned}$$

On remarque que $q_{ab,i} = q_{a,1}b$ et $q_{ab,i} = q_{b,i}a$ donc :

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \alpha_1 \times q_{a,1}b + \alpha_2 \times q_{a,2}b + \alpha_3 \times q_{a,3}b + \dots + \alpha_k \times q_{a,k}b \\ &\quad + \beta_1 \times q_{b,1}a + \beta_2 \times q_{b,2}a + \beta_3 \times q_{b,3}a + \dots + \beta_k \times q_{b,k}a \\ &= \left[\alpha_1 \times q_{a,1} + \alpha_2 \times q_{a,2} + \alpha_3 \times q_{a,3} + \dots + \alpha_k \times q_{a,k}\right] b \\ &\quad + \left[\beta_1 \times q_{b,1} + \beta_2 \times q_{b,2} + \beta_3 \times q_{b,3} + \dots + \beta_k \times q_{b,k}\right] a \\ &= \varphi(a)b + a\varphi(b)\end{aligned}$$

Autrement dit φ vérifie (3).

$\boxed{\varphi \text{ vérifie bien (2) et (3).}}$

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

5. (a) Calculer $\Delta(12)$, $\Delta(56)$, $\Delta(1\,001)$.

* $12 = 2^2 \times 3$, donc

$$\Delta(12) = 2 \times \frac{2^2 \times 3}{2} + 1 \times \frac{2^2 \times 3}{3}$$

$\boxed{\Delta(12) = 16.}$

* $56 = 2^3 \times 7$ donc

$$\Delta(56) = 3 \times \frac{2^3 \times 7}{2} + 1 \times \frac{2^3 \times 7}{7}$$

$$\boxed{\Delta(58) = 92.}$$

* $1001 = 7 \times 11 \times 13$ donc

$$\Delta(1001) = 1 \times \frac{7 \times 11 \times 13}{7} + 1 \times \frac{7 \times 11 \times 13}{11} + 1 \times \frac{7 \times 11 \times 13}{13}$$

$$\boxed{\Delta(1001) = 311.}$$

(b) Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?

$\Delta(0)\Delta(1) = 1$ donc 0 et 1 ne sont pas des racines de l'équation.

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.
$\Delta(n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k = 0.$
Autrement dit il faudrait que chacun des termes de cette somme de termes positifs soient nuls ce qui contredirait le fait que $n \geqslant 2$.
Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } \Delta(x) = 0 \text{ est vide.}}$$

(c) Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?

(d) Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?

(e) Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, $\Delta(n) \leqslant n$?

6. (a) Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.

   (b) Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

7. (a) Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a+b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

   (b) Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k.
   Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ.

8. (a) Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.

   (b) Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geqslant 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.

   (c) Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.