

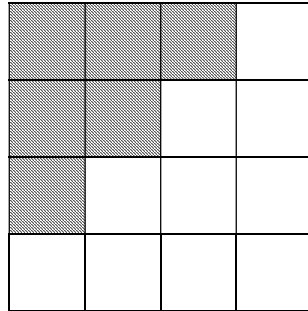
Exercice académique numéro 1 : Suites d'entiers (à traiter uniquement par les candidats de la série S)

Partie 1 : somme des n premiers entiers

On note S_n la somme des n premiers entiers strictement positifs.

Ainsi : $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2 = 3$, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, etc.

- 1) Calculer S_4 et S_5 .
- 2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Par définition de la suite (S_n) , combien vaut $S_n - S_{n-1}$?
- 3) Marie observe que $S_1 + S_2 = 4$ et $S_2 + S_3 = 9$. Elle se demande si en ajoutant deux termes consécutifs de la suite (S_n) , elle obtiendra toujours un carré.
 - a) Calculer $S_3 + S_4$ et $S_4 + S_5$. Qu'observez-vous ?
 - b) Marie a réussi à prouver son résultat à l'aide d'une figure du genre de celle-ci :



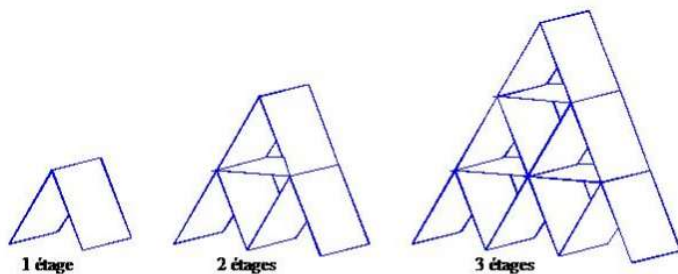
Expliquer son raisonnement, en le généralisant.

- c) A l'aide des questions 2) et 3)b), démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n^2+n}{2}$.

Partie 2 : Application au château de cartes

Marie adore faire des châteaux de cartes du genre de celui-ci-contre.

Le procédé est simple, comme l'illustre le schéma ci-dessous :

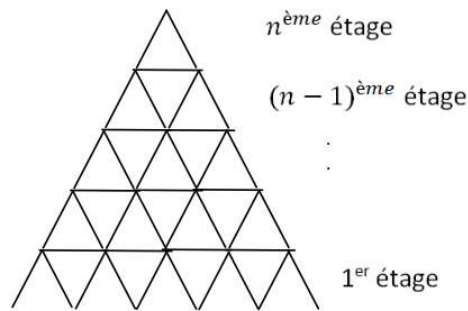


A) Relation de récurrence

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note U_n le nombre de cartes nécessaires pour faire un château à n étages.

- 1) Donner les valeurs de U_1 , U_2 et U_3 .
- 2) A l'aide du dessin donné ci-dessous, que l'on reproduira sur la copie, en le coloriant si nécessaire, montrer que pour tout entier $n \geq 2$

$$U_n = U_{n-1} + 3n - 1.$$



- 3) Recopier les lignes L_3 , L_4 et L_5 de cet algorithme en les complétant, pour qu'il affiche le nombre de cartes nécessaires pour faire un château d'un nombre d'étages donné :

Initialisation :	Afficher : « Quel est le nombre n d'étages que vous voulez faire ? » Saisir n . $U \leftarrow \dots\dots$	L_1 L_2 L_3
Début :	Pour i allant de 2 à $U \leftarrow \dots\dots\dots$ Fin pour.	L_4 L_5 L_6
Sortie :	Afficher : « Le nombre de cartes nécessaires est de », U .	L_7

- 4) A l'aide de votre calculatrice, déterminer le nombre de cartes nécessaires pour faire un château de 15 étages.

B) Terme général

- 1) A l'aide d'un dessin, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n = 2S_n + S_{n-1}$. (On rappelle que S_n a été défini à la partie 1).
- 2) Dédire de la question précédente et des résultats de la partie 1 que :
Pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \frac{3n^2 + n}{2}$
- 3) Combien d'étages aura le plus grand château que Marie pourra réaliser avec 10 paquets de 52 cartes ?

Exercice académique numéro 2 : Ecriture décimale illimitée et périodique (à traiter par tous les candidats)

Rappels :

Un nombre x est dit décimal lorsqu'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $x = \frac{a}{10^n}$.

Un nombre x est dit rationnel lorsqu'il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tel que $x = \frac{a}{b}$.

Un nombre x est dit irrationnel lorsqu'il n'est pas rationnel.

Enoncé

Quand on divise 1 par 11, on obtient 0,0909090909... On dira que cette écriture décimale est l'écriture décimale illimitée de $\frac{1}{11}$.

Les chiffres 0 et 9 se succèdent indéfiniment. On dira que cette écriture décimale est périodique et on écrira $\frac{1}{11} = 0,0\overline{9}$. Ainsi $\frac{90}{7} = 12,8\overline{57142}$.

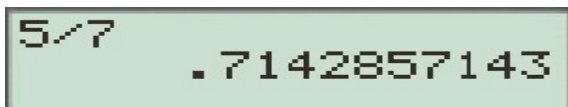
On remarquera que $\frac{1}{11} = 0,0\overline{9} = 0,0\overline{909} = 0,0\overline{909090909}$.

On appellera longueur de la période le nombre de chiffres minimum de la période et on désignera dans la suite par période, la plus petite des périodes.

Le but de l'exercice est de prouver qu'un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale illimitée périodique.

Partie I

- Déterminer une écriture décimale illimitée périodique de $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{13}$.
- En posant la division de $\frac{5}{7}$, expliquer pourquoi nécessairement la période est 714285.
- Voici la capture d'un écran de calculatrice:



Pourquoi cet affichage semble incohérent?

- Quelle est la longueur maximale de la période de l'écriture décimale de $\frac{11}{149}$?
- Justifier que tout nombre rationnel est ou un nombre décimal ou admet une écriture décimale illimitée périodique.
- A quel nombre correspond l'écriture $5,0\overline{}$? Conjecturer la valeur de $5,0\overline{}$ – $4,9\overline{}$? Que vaut alors $4,9\overline{}$?

Partie II

Nous venons d'établir que tout nombre rationnel avait au moins une écriture décimale illimitée périodique. On s'intéresse maintenant au problème réciproque. On va tenter de démontrer que toute écriture décimale illimitée périodique est l'écriture d'un nombre rationnel.

- a. Etude d'un exemple.

$x = 3,\overline{117}$. Calculer $1000x$ puis montrer que $1000x - x$ est un nombre entier. Déterminer une fraction irréductible égale à x .

- b. Appliquer la méthode précédente à $y = 0,\overline{96}$.

- c. Déterminer une fraction irréductible égale à $z = 2,\overline{35781}$.

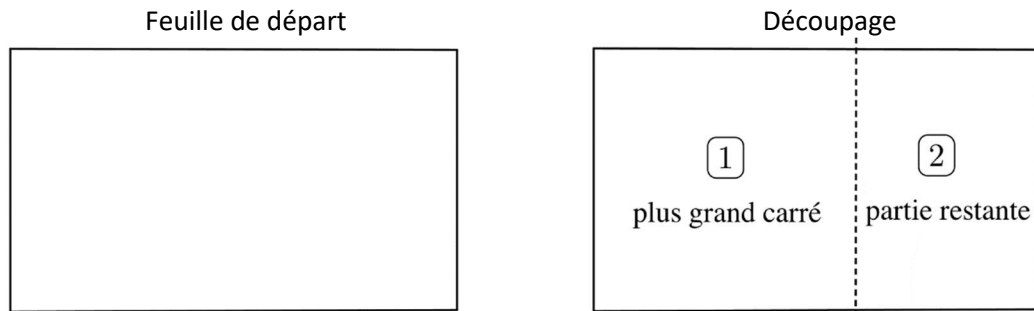
- d. **Question à traiter uniquement par les S**

Expliquer pourquoi si un nombre admet une écriture décimale illimitée périodique, alors ce nombre est rationnel. Conclure.

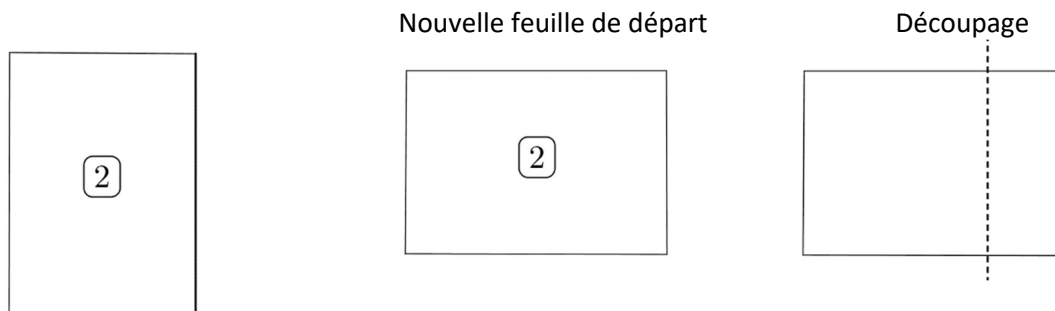
Exercice 3 : découpage.(à traiter uniquement par les candidats des séries autre que S)

On considère une feuille de papier, que l'on veut découper en carrés selon le principe suivant :

- On découpe cette feuille en deux morceaux, en faisant en sorte que l'un de ces morceaux soit un carré de plus grandes dimensions possible.



- On recommence l'opération avec ce qu'il reste (la feuille de départ moins le carré), éventuellement en la tournant pour retrouver la situation précédente.



Le processus s'arrête lorsque le morceau restant est aussi un carré. (on admet que le processus débouche toujours sur un carré)

Le but est de déterminer les dimensions du dernier carré, et le nombre de carrés découpés de cette façon.

- Premier exemple** : une unité étant choisie, on prend une feuille de longueur 29 unités et de largeur 21 unités.

a. Quelles sont les dimensions du premier carré découpé et du morceau restant ?

b. Quelles sont les dimensions du dernier carré découpé ?

c. Combien de carrés a-t-on obtenus au total ?

- Deuxième exemple** : une unité étant choisie, on prend une feuille de longueur 411 unités et de largeur 87 unités.

On adopte les notations suivantes : on note $n_0 = 411$ et $p_0 = 87$ (dimensions de la feuille de départ).

a. Combien de carrés de côté 87 unités peut-on découper au maximum dans cette feuille ?



- b. On note n_1 et p_1 les dimensions de la feuille obtenue lorsqu'on a enlevé ces carrés, avec $n_1 \geq p_1$. Montrer que $n_1 = 87$ et $p_1 = 63$.

6/6

- c. Recopier et compléter le tableau suivant jusqu'à obtenir la dimension du dernier carré.

n_i	411	87	
p_i	87	63	
Nombre de carrés de côté p_i dans cette feuille			

Combien de carrés a-t-on découpés au total dans cette feuille ?

3. **Cas général** : une unité étant choisie, pour une feuille de longueur n unités et de largeur p unités, avec $n \geq p$.

On rappelle la définition de la partie entière d'un nombre positif :

La partie entière d'un nombre x est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x . On la notera $E(x)$.

Par exemple : $E(2,3) = 2$, $E(5,97) = 5$, $E(3) = 3$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables : n, p, r : nombres entiers naturels.

Afficher « donner les valeurs de n et p , avec $n \geq p$ »

Saisir n, p

$r \leftarrow 1$

Tant que $r > 0$ faire

$q \leftarrow \frac{n}{p}$

$r \leftarrow n - E(q) \times p$

$n \leftarrow p$

$p \leftarrow r$

Fin Tant que

Afficher n

- a. On choisit $n = 924$ et $p = 340$. Recopier et compléter le tableau suivant en faisant tourner cet algorithme à la main :

	initialisation	Etape 1	Etape 2	
q		2,7		
$E(q)$		2		
r	1	244		
n	924	340		
p	340	244		

Quelle est la valeur affichée à la fin ?

- b. A quoi sert cet algorithme ?
- c. Modifier l'algorithme pour que celui-ci calcule et affiche le nombre de carrés découpés au total.