

## Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

### Géométrie de l'à-peu-près

#### Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle  $ABC$  est à peu près rectangle en un sommet  $A$  si la mesure de l'angle en  $A$  est dans l'intervalle  $[75^\circ, 105^\circ]$ . On dit qu'un triangle  $ABC$  est à peu près isocèle en un sommet  $A$  si les mesures des angles en  $B$  et en  $C$  diffèrent de  $15^\circ$  au maximum.

1. **a.** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
- b.** Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?
2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?
3. Écrire un programme en pseudocode, à recopier sur votre copie, testant si un triangle  $ABC$  dont on connaît les trois angles en  $A$ ,  $B$  et  $C$  est à peu près isocèle.

#### Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :

- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à  $0,1$  ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent d'au plus  $0,1$  ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, d'au plus  $0,1$ .

4. **a.** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
- b.** Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?
5. On considère un cercle, de centre  $O$  de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle :  $A$ , fixe, et  $B$ , mobile. On appelle  $I$  le milieu du segment  $[OA]$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur la droite  $(OA)$ .
  - a.** Représenter sur une figure l'ensemble des points  $B$  pour lesquels  $H$  et  $I$  sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
  - b.** Si  $H$  et  $I$  sont à peu près égaux, le triangle  $AOB$  est-il à peu près équilatéral ?

#### Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle  $ABC$  par les mesures  $x$  et  $y$  de ses angles en  $A$  et  $B$ . Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées  $(x, y)$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure  $10^\circ$  par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
  - a.** Le domaine  $\mathcal{T}$  constitué des points représentant tous les triangles ;
  - b.** Le point  $E$  représentant les triangles équilatéraux ;
  - c.** L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.
7. **a.** Quelle partie  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{T}$  représente les triangles acutangles ?
- b.** Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de  $\mathcal{A}$  à l'aire de  $\mathcal{T}$ , quelle est cette proportion ?
8. Quelle partie  $\mathcal{R}$  du domaine  $\mathcal{T}$  représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

**Ensembles arithmétiques**

Un ensemble  $S$  de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple  $(a, b)$  avec  $a$  et  $b$  appartenant à  $S$ , il existe un élément  $c$  de  $S$  tel que l'un des nombres  $a, b$  ou  $c$  est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers  $n$  strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant  $n$  éléments.

1. a. Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$$S_1 = \{0,1,2\} \quad S_2 = \{0,1,2,3\} \quad S_3 = \{0,1,2,4\} \quad S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle  $[0,2]$ , et contenant 0, 1 et 2.

2. a. Outre  $\frac{a+b}{2}$ , quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple  $(a, b)$  d'éléments de  $S$  ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble  $S$  est encodé sous la forme d'une liste  $S = [S[1], \dots, S[n]]$  de taille  $n$ . Par exemple la moyenne arithmétique du  $i$ ème et du  $j$ ème élément de  $S$  s'écrit  $(S[i]+S[j])/2$ .

```

fonction TesterEA(S=[S[1],...,S[n]] , n)
    Resultat ← Vrai
    Pour i de 1 à n
        Pour j de 1 à n
            [...]
        Fin Pour
    Fin Pour
    Renvoyer(Resultat)
    
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient( $r,S$ ) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel  $r$  appartient à la liste  $S$  et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si  $S=[S[1], \dots, S[n]]$  est un ensemble arithmétique de longueur  $n$ .

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 2 et  $S$  un EA ayant  $n$  éléments dont le plus grand est noté  $M$  et le plus petit  $m$ . Aux éléments  $a$  de  $S$ , on associe les nombres  $\frac{2(a-m)}{M-m}$ . On constitue ainsi l'ensemble  $S'$ . Démontrer que  $S'$  est un EA ayant  $n$  éléments, inclus dans l'intervalle  $[0,2]$ , et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit  $S$  un EA ayant  $n$  éléments, inclus dans l'intervalle  $[0,2]$ , et contenant 0 et 2. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ :

- Si  $x$  appartient à  $S$  et  $0 < x < 1$  alors  $\frac{x+2}{2}$  appartient à  $S$  ;
- Si  $x$  appartient à  $S$  et  $1 < x < 2$  alors  $\frac{x}{2}$  appartient à  $S$ .

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit  $S$  un EA ayant  $n$  éléments, inclus dans l'intervalle  $[0,2]$ , et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément  $a_1$  de  $S$  tel que  $0 < a_1 < \frac{2}{3}$ , alors il existe un élément  $a_2$  de  $S$  tel que  $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$ .

En déduire que  $S$  ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et  $\frac{2}{3}$ .

b. Démontrer, de façon analogue, que  $S$  ne contient aucun nombre strictement compris entre  $\frac{2}{3}$  et 1.

c. En déduire que  $n \leq 5$ .

6. Quels sont les entiers  $n$  pour lesquels il existe un EA ayant  $n$  éléments ?

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

3/3

### Boules de même couleur

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant  $n$  boules pouvant être de différentes couleurs.

Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.

On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.

On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité  $P(G)$  que le joueur gagne est égale à  $\frac{1}{2}$ .

**1. a.** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors  $P(G) = \frac{7}{15}$ .

**b.** Calculer  $P(G)$  lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

**2.** Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.

**a.** Soit  $x$  le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.

Démontrer que  $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$ .

**b.** Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

**3.** Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.

**a.** On suppose que l'urne présente la configuration  $(a, b)$  c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple,  $a$  boules rouges et  $b$  boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque  $n = (a - b)^2$ .

**b.** Réciproquement démontrer que si  $n$  est le carré d'un entier  $p$  alors il existe deux entiers naturels  $a$  et  $b$  avec  $a \geq b$  que l'on exprimera en fonction de  $p$  tels que la configuration  $(a, b)$  conduise à un jeu équitable.

**c.** Donner six couples  $(a, b)$  conduisant à un jeu équitable.

**4.** Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration  $(a, b, c)$ , c'est-à-dire, par exemple,  $a$  boules blanches,  $b$  rouges et  $c$  noires.

**a.** Montrer que si  $n = 13$ , le jeu est équitable lorsque  $a^2 + b^2 + c^2 = 91$ . En déduire une configuration  $(a, b, c)$  conduisant à un jeu équitable pour  $n = 13$ .

**b.** Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple  $(x, y)$  conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de  $z$  non nulle telle que le triplet  $(x, y, z)$  conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.

**c.** Donner un triplet  $(a, b, c)$  conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

**5.** On suppose que l'urne contient des boules de  $m$  couleurs différentes où  $m \geq 2$ .

Démontrer que la configuration  $(1, 3, 9, \dots, 3^{m-1})$  conduit à un jeu équitable.