Olympiades mathématiques de première 2017. Sujet national de métropole, Europe, Afrique, Orient et Inde.

I Exercice national : somme des carrés en abyme.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.

Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$ et $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction.

1. (a) Calculer $f(1)$, $f(11)$, $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.

*

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 \\ &= 1 \\ f(11) &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \\ f(111) &= 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$f(1) = 1.$
$f(11) = 2.$
$f(111) = 3.$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En itérant les calculs précédents nous remarquons que l'entier naturel non nul $p = \underbrace{111\ldots1}_{\text{répété } n \text{ fois}}$ est bien un antécédent de n.

Tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.

(b) Calculer $f(23)$, $f(32)$ et $f(320)$.

*

$$\begin{aligned} f(23) &= 2^2 + 3^2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} f(32) &= 3^2 + 2^2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} f(320) &= 3^2 + 2^2 + 0^2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(23) = f(32) = f(320) = 13.}$$

(c) Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question 1.(a) il existe un antécédent $p \in \mathbb{N}^*$ de n.
Considérons la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial $u_0 = p$ et de raison 10.
Puisque la raison de la suite géométrique est positive et différente de 0 et 1 les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous distincts deux à deux.
De plus, en raisonnant comme à la question précédente, nous obtenons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(u_n) = f(p) = n$.
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de termes deux à deux distincts qui sont tous des antécédents de n par f.

$$\boxed{\text{Tout entier naturel admet une infinité d'antécédents par } f.}$$

La suite des images successives d'un entier.

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, ..., $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.

2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
   Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?

   *

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= f(301) \\ &= 3^2 + 0^2 + 1^2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} u_2 &= f(u_1) \\ &= f(10) \\ &= 1 \\ u_3 &= 1 \\ u_4 &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi : si $u_0 = 301$ alors $u_1 = 10$, $u_2 = u_3 = u_4 = 1$.

* Si $u_0 = 23$ alors $u_1 = 13$, $u_2 = 10$, $u_3 = u_4 = 1$.

* Si $u_0 = 1030$ alors $u_1 = 10$, $u_2 = u_3 = u_4 = 1$.

3. Calculer les nombres u_0, u_1, u_2, ..., u_8 pour $u_0 = 4$.
   Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

$$u_1 = 16$$
$$u_2 = 37$$
$$u_3 = 58$$
$$u_4 = 89$$
$$u_5 = 145$$
$$u_6 = 42$$
$$u_7 = 20$$
$$u_8 = 4$$

Les valeurs de u_0 jusqu'à u_7 se répète indéfiniment.

Étude d'une propriété.

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, ... On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-dessous.

Variable : *u entier naturel non nul.*
Entrer u.
Tant que ($u \neq 1$ et $u \neq 4$).
$u \leftarrow f(u)$.
Afficher u.
Fin tant que.
Afficher « propriété vérifiée ».

4. (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?

L'algorithme calcul les termes successifs de la suite avec u_0 valant la valeur initiale de u jusqu'à obtenir un terme égale à 1 ou à 4.
Or si $u_0 = 42$ alors

$$u_1 = 20$$
$$u_2 = 4$$

et donc l'algorithme s'arrête et

> il affiche « propriété vérifiée ».

(b) Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » alors c'est que l'un des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut soit 1 soit 4.

S'il vaut 1 alors, d'après termes suivants valent forcément tous 1.

S'il vaut 4, alors d'après la question 3 la suite est périodique de période 8.

> Si l'algorithme affiche « propriété vérifiée » alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

(c) Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?

Si u ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ alors aucun des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vaut 1 ou 4 et donc la boucle while ne prend jamais fin (infinite loop).

> Si u ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ alors le programme bug.

(d) Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

En lançant le programme en donnant à u toutes les valeurs entières de 1 à 99 nous devrions obtenir à chaque fois l'affichage « propriété vérifiée ».

Une manière élégante de le faire serait de placer l'algorithme précédent dans une boucle donnant successivement à u toutes les valeurs entières de 1 à 99.

Extension aux écritures à trois chiffres.

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.

(a) Montrer que $x - f(x) \geqslant 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leqslant x - 1$.

$$\begin{aligned} x - f(x) &= 100a + 10b + c - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a(100-a) + b(10-b) + c - c^2 \end{aligned}$$

Démontrons que $x - f(x) \geqslant 99 + c - c^2$.

Démontrons que $a(100-a) + b(10-b) \geqslant 99$.
Il n'y a que 90 couples de valeurs possibles pour (a,b). Un petit programme informatique, avec deux boucles imbriquées, serait donc adapté.

* Si $2 \leqslant a \leqslant 9$ alors nous avons successivement :

$$\begin{aligned} a &\leqslant 9 \\ -a &\geqslant -9 \\ 100 - a &\geqslant 100 - 9 \\ a(100-a) &\geqslant 91a \quad \text{car } a > 0 \\ a(100-a) &\geqslant 91 \times 2 \quad \text{car } a \geqslant 2 \\ a(100-a) &\geqslant 182 \\ a(100-a) &\geqslant 99 \end{aligned}$$

* Si $a = 1$ alors $a(100-a) = 99 \geqslant 99$.
* Si $0 \leqslant b \leqslant 9$ alors nous avons successivement :

$$\begin{aligned} b &\leqslant 9 \\ -b &\geqslant -9 \\ 10 - b &\geqslant 10 - 9 \\ b(10-b) &\geqslant b \times 1 \quad \text{car } b \geqslant 0 \\ b(10-b) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

De

$$\begin{cases} a(100-a) \geqslant 99 \\ b(10-b) \geqslant 0 \end{cases}$$

nous déduisons en sommant terme à terme :

$$a(100-a) + b(10-b) \geqslant 99.$$

$$\boxed{f(x) - x \geqslant 99 + c - c^2.}$$

Démontrons que $99 + c(1 - c) > 0$.

Il n'y a que 9 valeurs à tester un tableau de valeurs à la calculatrice ferait aussi bien l'affaire.

Puisque $c \leqslant 9$

$$\begin{aligned} -c &\geqslant -9 \\ 1 - c &\geqslant -8 \\ c(1 - c) &\geqslant -8c \quad \text{car } c \geqslant 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} -c &\geqslant -9 \\ -8c &\geqslant -72 \quad \text{car } 8 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} c(1 - c) \geqslant -8c \\ -8c \geqslant -72 \end{cases}$$

et donc par transitivité

$$c(1 - c) \geqslant -72$$

Enfin

$$99 + c(1 - c) \geqslant 99 - 72$$

$$\boxed{99 + c - c^2 > 0.}$$

Puisque $99 + c - c^2$ est un entier strictement supérieur à 0 : $x - f(x) \geqslant 1$.

$$\boxed{f(x) \leqslant x - 1.}$$

(b) Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leqslant 99$. Conclure.

Démontrons en raisonnant par l'absurde qu'il existe un rang J tel que $u_J \leqslant 99$.

Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 100$. Et démontrons que cela conduit à une contradiction.

* Si $x = 100a + 10b + c$ avec a, b et c des entiers naturels inférieurs à 9 alors : $f(x) = a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$.
  Comme de plus u_n comporte au moins trois chiffres, par une récurrence immédiate nous obtenons que tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aurons 3 chiffres. Et même : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $100 \leqslant u_n \leqslant 243$.
* Puisque tous les termes de (u_n) ont trois chiffres, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) \leqslant u_n - 1.$$

  Autrement dit :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant -1.$$

  Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement décroissante.
  En particulier il existera un rang$J$ tel que $u_J \leqslant 99$. Ceci contredit notre hypothèse de départ.

Nous avons démontré par l'absurde que, nécessairement, si $u_0 \in [\![100; 999]\!]$ alors, il existe un rang J tel que $u_J \leqslant 99$.

Généralisation.

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.

6. (a) Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.

Notons $P(n)$: « $81p < 10^{p-1}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 4$.

Démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

* $81 \times 4 = 324$ et $10^{4-1} = 1000$ donc : $81 \times 4 < 10^{4-1}$.
  Autrement dit $P(4)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 4$.
  Supposons que $P(n)$ est vraie est démontrons qu'alors nécessairement $P(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence :

$$81n < 10^{n-1}.$$

  Donc

$$81n + 81 < 10^{n-1} + 81.$$

  Autrement dit

$$81(n+1) < 10^n\left(10^{-1} + \frac{8{,}1}{10^n}\right).$$

  Or $10^{-1} + \frac{8{,}1}{10^p} \leqslant 0{,}1 + \frac{10}{10^4} \leqslant 0{,}1001 < 1$ donc

$$81(n+1) < 10^n.$$

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $P(n)$ est vraie.

(b) En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres ($p \geqslant 4$), alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p-1$ chiffres.

Si u_n s'écrit avec $p \geqslant 4$ chiffres $f(u_n) \leqslant p9^2 = 81p < 10^{p-1}$ donc $f(u_n)$ s'écrit avec strictement moins que p chiffres.

(c) Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leqslant 999$. Conclure.

Le problème ayant déjà été traité dans le cas de u_0 avec moins de 2 chiffres et 3 chiffres supposons que u_0 a p chiffres avec $p \geqslant 4$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux 1000.
D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite strictement décroissante d'entiers et par conséquent il existe un rang K tel que $u_K < 1000$.
Cette contradiction avec notre hypothèse permet de conclure que

si $u_0 \geqslant 4$ alors il existe un rang K tel que $u_K \leqslant 999$.

Nous avons établi que le cas des entiers naturels non nuls de plus de 3 chiffres se ramène au cas des entiers naturels de chiffres. Comme ces derniers vérifient tous la propriété $\mathcal{P}$ nous pouvons conclure :

les entiers naturels non nuls vérifient tous la propriété $\mathcal{P}$.

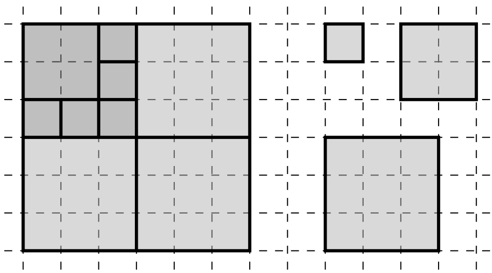
II Exercice national : 1, 2, 3 ... dallez !

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.

Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.

Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.

On montre ci-dessous un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. (a) Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?

   Il suffit de recouvrir K_6 de 4 carrés de taille 3.

   (b) Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1 .

   (c) Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.