Olympiades mathématiques de première 2017. Sujet académique de Amiens.

I Exercice académique : langage codé.

1. $\begin{array}{r|l} 8\ 9 & 2\ 6 \\ \cline{2-2} -\ 7\ 8 & 3 \\ \cline{1-1} 1\ 1 & \end{array}$ donc $89 = 26 \times 3 + 11$.

   Pour la lettre M

   - M est associé à 12.
   - 12 est associé au reste de la division euclidienne de $7 \times 12 + 5 = 89$ par 26. D'après la division euclidienne précédente 12 est associé à 11.
   - La lettre associée à 11 est L.

   La lettre M est codée par la lettre L.

2.

x	position	$7x+5$	reste	y
M	12	89	11	L
A	0	5	5	F
T	19	138	8	I
H	7	54	2	C
S	18	131	1	B

   MATHS est codé en LFICB.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

   Supposons que a et b ont le même reste, r (avec $0 \leqslant r < c$), dans la division euclidienne par c et

   démontrons que ka et kb ont même reste dans la division euclidienne par c.

   Il existe des entiers q_1 et q_2 tels que :

$$a = q_1 \times c + r \quad \text{et} \quad b = q_2 \times c + r$$

   En multipliant ces égalités par k :

$$ak = q_1 \times k \times c + kr \quad \text{et} \quad bk = q_2 \times k \times c + kr$$

Nous en déduisons que le reste de la division euclidienne de ak et bk par c est celui de la division euclidienne de kr par c. Il s'agit bien du même.

ka et kb ont même reste dans la division euclidienne par c.

4. (a) Supposons que y et $7x$ ont le même reste, r avec $0 \leqslant r \leqslant 25$, dans la division euclidienne par 26 et

démontrons que forcément $15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

Par hypothèse, il existe q_1 et q_2 des entiers tels que

$$y = q_1 \times 26 + r \quad \text{et} \quad 7x = q_2 \times 26 + r$$

Nous en déduisons

$$15 \times y = q_1 \times 15 \times 26 + 15 \times r \quad \text{et} \quad 15 \times 7x = q_2 \times 15 \times 26 \times +15 \times r$$

Autrement dit :

$$\begin{array}{lcl}
15y = (15q_1) \times 26 + 15r & \text{et} & 105x = (15q_2) \times 26 + 15r \\
15y = (15q_1) \times 26 + 15r & \text{et} & (4 \times 26 + 1)x = (15q_2) \times 26 + 15r \\
15y = (15q_1) \times 26 + 15r & \text{et} & (4x) \times 26 + x = (15q_2) \times 26 + 15r \\
15y = (15q_1) \times 26 + 15r & \text{et} & x = (15q_2 - 4x) \times 26 + 15r
\end{array}$$

Par conséquent $15y$ et x ont le même reste que $15r$ dans la division euclidienne par 26. Donc

$15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

(b) Supposons que x et $15y$ ont le même reste, r avec $0 \leqslant r \leqslant 25$, dans la division euclidienne par 26 et

démontrons que forcément y et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

Par hypothèse, il existe q_1 et q_2 des entiers tels que

$$x = q_1 \times 26 + r \quad \text{et} \quad 15y = q_2 \times 26 + r$$

Nous en déduisons

$$7 \times x = (q_1 \times 7) \times 26 + 7 \times r \quad \text{et} \quad 7 \times 15y = (q_2 \times 7) \times 26 \times +7 \times r$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} 7x &= (q_1 \times 7) \times 26 + 7r \quad \text{et} \quad 7 \times 15y = (q_2 \times 7) \times 26 \times +7r \\ 7x &= (q_1 \times 7) \times 26 + 7r \quad \text{et} \quad 4y \times 26 + y = (q_2 \times 7) \times 26 \times +7r \\ 7x &= (q_1 \times 7) \times 26 + 7r \quad \text{et} \quad +y = (q_2 \times 7 - 4y) \times 26 \times +7r \end{aligned}$$

Par conséquent $7x$ et y ont le même reste que $7r$ dans la division euclidienne par 26. Donc

$7x$ et ont le même reste dans la division euclidienne par 26.

5. Dans la question précédente nous avons démontré une implication et sa réciproque donc les deux propositions sont équivalentes.

6.

y	position	$15y + 3$	reste	x
Z	25	378	14	O
E	4	63	11	L
R	17	258	24	Y
L	11	168	12	M
G	6	93	15	P
J	9	138	8	I
F	5	78	0	A
A	0	3	3	D
H	7	108	4	E
B	1	18	18	S

ZERLGJFAHB se décode en OLYMPIADES.