Olympiades 2016. Sujet national : Métropole, Europe, Afrique, Orient et Inde.

I Exercice pour tous les candidats : échanges thermiques.

En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure -y compris la base en contact avec le sol- de ce bâtiment, mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

   (a) Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.

   Déterminons le facteur de compacité, c_1, du cube.

   Notons $\mathscr{A}_1$ l'aire de la surface du cube et $\mathscr{V}_1$ le volume du cube.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{V}_1} \\ &= \frac{6a^2}{a^3} \\ &= \frac{a^2 \times 6}{a^2 \times a} \\ &= \frac{6}{a} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_1 = 6a^{-1}.}$$

   (b) Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

   Déterminons le facteur de compacité, c_2, de la demi-sphère.

   Notons $\mathscr{A}_2$ l'aire de la surface de la demi-sphère et $\mathscr{V}_2$ son volume.

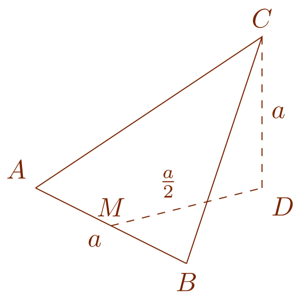
$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\mathscr{A}_2}{\mathscr{V}_2} \\ &= \frac{2\pi r + \frac{1}{2}\times 4\pi r^3}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= \frac{2\pi r(1+r^2)}{2\pi r\frac{1}{3}r^2} \\ &= \frac{1+r^2}{\frac{1}{3}r^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_2 = 3\left(1+\frac{1}{r^2}\right).}$$

(c) Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.

Déterminons le facteur de compacité, c_3, de la pyramide.

Notons $\mathscr{A}_3$ l'aire de la surface de la pyramide et $\mathscr{V}_3$ son volume.
Déterminons l'aire d'une face triangulaire ABC où C est le sommet de la pyramide. Notons M le milieu de $[AB]$ et D le projeté orthogonal de C sur la face carrée de la pyramide.



Puisque MDC est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$MD^2 + DC^2 = MC^2.$$

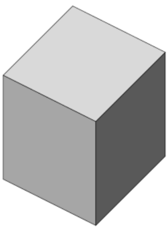
D'où : $MC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

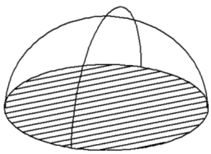
Nous en déduisons que l'aire de ABC est : $\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$.

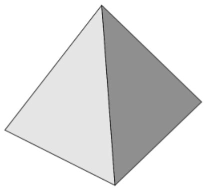
Nous pouvons maintenant calculer c_3 :

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{\mathscr{A}_3}{\mathscr{V}_3} \\
&= \frac{a^2 + 4 \times \frac{\sqrt{5}}{4} a^2}{\frac{1}{3} a^2 \times a} \\
&= \frac{a^2(1+\sqrt{5})}{a^2 \times \frac{1}{3} a} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{\frac{1}{3} a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{c_3 = \frac{3(1+\sqrt{5})}{a}.}$$







(d) En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z

   (a)