



# Olympiades académiques de mathématiques Série S

---

## Académie de NICE

### Mercredi 18 mars de 8h à 12h

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

***Durée de la composition : 4 heures***

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2h heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

## Exercice numéro 1 (proposé par le jury national)

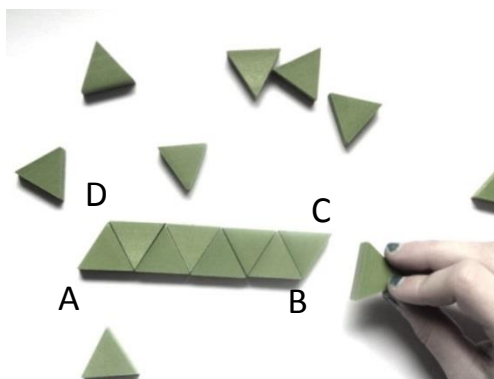
### Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.

Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

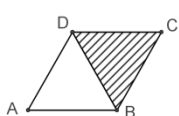
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- $L = AC$  la longueur de la diagonale [AC] ;
- $l = BD$  la longueur de la diagonale [BD].

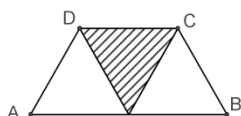


#### Partie A

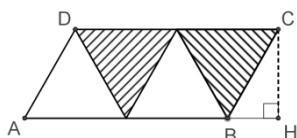
1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.
2. Calculer les longueurs  $l$  et  $L$  pour les cas suivants :



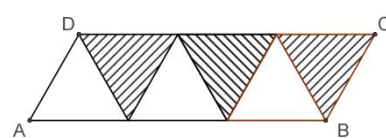
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

#### Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note  $n$  le nombre de triangles équilatéraux alignés ( $n$  est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre  $n$  de triangles est **pair**, montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à  $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$ , où  $p = \frac{n}{2}$ .
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs  $l$  et  $L$  ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs  $l$  et  $L$  calculées par Léa.

#### Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

**1<sup>re</sup> propriété** : « Pour tout nombre  $n$  de triangles juxtaposés,  $L$  est la racine carrée d'un nombre impair »

**2<sup>e</sup> propriété** : « Pour tout nombre  $n$  de triangles juxtaposés,  $L$  est la racine carrée d'un nombre premier »

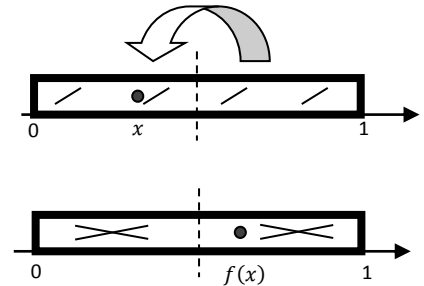
*On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.*

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur  $\sqrt{2\ 015}$  ?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure  $\sqrt{1\ 015\ 057}$ . Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

## Exercice numéro 2 (proposé par le jury national)

## On est les rois !

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.



### Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1 - x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par  $f$  d'un élément de  $[0, 1]$  appartient à  $[0, 1]$ .
2. Justifier pourquoi cette fonction  $f$  modélise le déplacement de la fève.

### Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par  $f$  d'un élément  $x$  de  $[0, 1]$  sont notées  $x_1 = f(x)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$  etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse  $x$ .

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse  $\frac{1}{3}$  ? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse  $x$ , revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de  $x$  pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse  $x$  vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que «  $x$  atteint sa cible ». Donner un exemple où  $x$  atteint sa cible, et un autre où  $x$  ne l'atteint pas.
4. Le nombre  $\frac{2015}{2^{2015}}$  atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de  $[0, 1]$  atteignant leur cible.

### Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre  $x$  dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après les questions **B.5.** ou même **B.2.**, le nombre  $\frac{1}{9}$  n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi  $x = \frac{1}{9}$  en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec  $x = \frac{1}{9}$  en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir  $x = 0$  au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

#### Annexe.

##### Variables

$x$  est un élément de  $[0, 1]$

##### Début

**Saisir** le nombre  $x$  compris entre 0 et 1

**Tant que**  $x \neq 0$  **faire**

**Si**  $x \leq \frac{1}{2}$  **alors**

$x$  **prend la valeur**  $2x$

**Sinon**

$x$  **prend la valeur**  $2(1 - x)$

**Fin tant que**

**Fin**

## Exercice numéro 3 (proposé par le jury académique)

## La suite de Protéus

**Préliminaire :** en informatique, **un mot** est une suite de 0 et de 1.

Par exemple : 010011 est un mot.

- 1) Combien peut-on former de mots de  $n$  chiffres ( $n$  non nul) ?
- 2) Expliquer pourquoi un mot d'au moins 4 chiffres comporte forcément, dans son écriture, deux blocs de chiffres consécutifs identiques.

### A) Une transformation

On considère la transformation  $P$  qui opère sur les mots en remplaçant chaque 0 par 01 et chaque 1 par 10.

Ainsi :

- ❖  $P(0) = 01$  et  $P(1) = 10$
- ❖ Si on considère par exemple le mot 010 alors :  $P(010) = (01)(10)(01) = 011001$

A vous de jouer : déterminez  $P(11)$  et  $P(100)$ .

### B) La suite de Protéus

La suite de Protéus  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie ainsi :  $t_0 = 0$  ;  $t_1 = P(t_0)$  ;  $t_2 = P(t_1)$  ;  $t_3 = P(t_2)$  etc..., c'est-à-dire pour tout entier  $n$  positif,  $t_{n+1} = P(t_n)$

- 1) Déterminer  $t_1, t_2$  et  $t_3$ .
- 2) Déterminer en fonction de  $n$  le nombre de chiffres qui composent  $t_n$ . Expliquer.
- 3) Y a-t-il toujours autant de 1 que de 0 dans chaque mot  $t_n$  de la suite de Protéus, pour tout entier  $n$  strictement positif ? Expliquer.

### C) Le miroir

Pour tout mot  $m$ , on note  $\bar{m}$  le mot obtenu en remplaçant dans  $m$  le chiffre 0 par 1 et le chiffre 1 par 0.  
Par exemple : si  $m = 010$  alors  $\bar{m} = 101$

- 1) Déterminer  $P(\bar{0}), P(\bar{1})$  ; pour tout mot  $m$ , comparer :  $P(\bar{m})$  et  $\overline{P(m)}$ .
- 2)
  - a) En observant les mots  $t_1, t_2$  et  $t_3$  vérifier qu'on peut construire simplement  $t_2$  à partir de  $t_1$  ainsi que  $t_3$  à partir de  $t_2$ .
  - b) Expliquer pourquoi cette relation se poursuit de proche en proche et comment on peut construire  $t_{n+1}$  à partir de  $t_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .
  - c) Comment peut-on retrouver à partir de cette relation le nombre de 0 et de 1 dans un mot quelconque  $t_n$  ?
  - d) Quels sont les deux derniers chiffres du mot  $t_{2015}$  ?

### D) Enigme 1

Dans le système binaire, les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 0 et 1. Par exemple, le nombre 13 s'écrit dans le système binaire 1101. En effet on peut le décomposer suivant les puissances décroissantes de 2 de la façon suivante :

$$13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

A vous de jouer : compléter le tableau suivant.

Nombre en base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
$N =$ Nombre en base 2	0	1	10	11	100			
$S =$ Somme des chiffres de $N$				2				
Reste de la division euclidienne de $S$ par 2				0				

En concaténant les chiffres de la dernière ligne, qui reconnaissez-vous ?

## E) Enigme 2

Considérons les entiers de 1 à 8.

Nous souhaitons les séparer de façon à former deux ensembles  $E$  et  $F$  respectant les règles suivantes :

- ❖  $E$  et  $F$  comportent le même nombre d'éléments.
- ❖ La somme des puissances  $k^{\text{ième}}$  des éléments de  $E$  est égale à la somme des puissances  $k^{\text{ième}}$  des éléments de  $F$ , pour  $k = 1$  et  $k = 2$

- 1) Trouver les deux ensembles  $E$  et  $F$  répondant au problème.
- 2) Quel lien existe-t-il entre les ensembles  $E$  et  $F$ , et le mot  $t_3$

### Exercice numéro 4 (proposé par le jury académique) Marathon de points

On considère l'itinéraire d'un point animé  $A$  dans un repère orthonormé, selon un enroulement en escargot, comme représenté ci-contre. Une unité représente 1 cm.

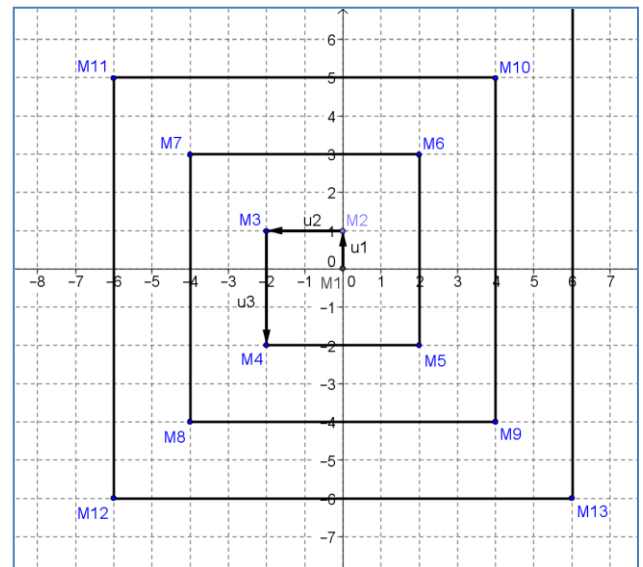
On note  $M_1, M_2, M_3, \dots$  les points correspondants aux changements de direction, autrement dit  $M_n$  est le point d'origine du  $n^{\text{ème}}$  déplacement (horizontal ou vertical), avec  $n$  entier strictement positif.  $M_1$  est le point de départ de l'itinéraire, en lequel on a placé l'origine du repère.

La distance parcourue entre deux changements de direction est augmentée de 1 cm, à chaque changement de direction, sachant qu'on commence par parcourir, entre  $M_1$  et  $M_2$ , 1 cm.

On note  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots$  les vecteurs représentant les déplacements (de directions parallèles aux axes) ; autrement dit,  $\vec{u}_n$  représente le  $n^{\text{ème}}$  déplacement, avec  $n$  entier strictement positif.

Ainsi,  $\vec{u}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2}$ ,  $\vec{u}_2 = \overrightarrow{M_2 M_3}$ , etc, soit  $\vec{u}_n = \overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ , avec  $n$  entier strictement positif.

On constate donc, par exemple, que  $M_1(0; 0), M_2(0; 1), \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



## A) Déplacements

1) Donner les coordonnées des 8 vecteurs correspondants aux 8 premiers déplacements  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_8)$ , puis classer ces vecteurs par groupes de vecteurs colinéaires et de même sens.

2)

a) Pour quelles valeurs de  $n$ , les nombres  $\frac{n}{2}$  et  $\frac{n-1}{2}$  sont-ils des entiers ?

b) Déterminer  $(-1)^{\frac{n}{2}}$ , en fonction de la valeur de  $n$ , dans le cas où  $n$  est pair ; puis déterminer  $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ , en fonction de la valeur de  $n$ , dans le cas où  $n$  est impair (on pourra remarquer qu'alors  $n - 1$  est pair).  
En déduire l'expression des coordonnées de  $\vec{u}_n$ , en fonction de  $n$ , pour  $n$  pair, puis pour  $n$  impair.

c) Déterminer les coordonnées de  $\vec{u}_{400}$ , puis de  $\vec{u}_{715}$ .

3) Recopier et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il renvoie les coordonnées  $x_u$  et  $y_u$  de  $\vec{u}_n$ , pour une valeur de  $n$  donnée par l'utilisateur (on pourra utiliser  $\text{Reste}(n, d)$  qui renvoie le reste de la division entière de  $n$  par  $d$ ):

```

VARIABLES
n entier > 0
x_u entier relatif
y_u entier relatif
ENTREES
Saisir n
TRAITEMENT

SORTIE
Afficher x_u, y_u
    
```

## B) Points et distances

On lit  $M_3(-2; 1)$ ,  $M_4(-2; -2)$ ,  $M_5(2; -2)$ ,  $M_6(2; 3)$ ,  $M_7(-4; 3)$ ,  $M_8(-4; -4)$ .

1) On trace la demi-droite  $[M_4M_8)$ , que l'on appellera  $D$ .

a) Que peut-on conjecturer quant aux indices des points  $M_n$  qui semblent être situés sur cette droite ?  
Calculer les coordonnées de  $\vec{M_4M_8}$ .

b) Soit  $r$  un multiple de 4 strictement positif. Montrer que  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_{r+1}$ ,  $\vec{u}_{r+2}$  et  $\vec{u}_{r+3}$  ont respectivement pour coordonnées  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ r+1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -r-2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ -r-3 \end{pmatrix}$ .

c) On considère  $r$  et  $s$  deux multiples de 4 consécutifs et strictement positifs, tels que  $r < s$ .  
Démontrer que  $\vec{M_rM_s} = \vec{M_4M_8}$ . Que penser alors de la conjecture précédente ?

d) Donner les coordonnées de  $\vec{M_4M_{12}}$  et  $\vec{M_4M_{40}}$ . Déterminer, en fonction de  $k$  entier strictement positif, les coordonnées de  $\vec{M_4M_{4k}}$ .

e) En déduire que les points  $M_n$  qui appartiennent à  $D$  ont pour coordonnées  $(-\frac{n}{2}; -\frac{n}{2})$ .

f) Calculer la distance  $OM_n$ , en fonction de  $n$ , pour  $M_n \in D$ .

2) On considère un point animé  $B$  qui se déplace dans le même repère, et en partant lui aussi de l'origine, mais directement le long de la demi-droite  $D$ . A partir de quel entier  $n$  (multiple de 4), le point  $A$  aura-t-il parcouru au moins 15 fois la distance parcourue par le point  $B$ , pour arriver au point  $M_n$  ? Justifier.