ESA 2019.

Épreuves d'admissibilité du concours 2016 d'admission à l'école de santé des armées .

Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Mercredi 13 avril 2018.

Épreuve de mathématiques.

Durée : 1 heure 30 minutes

Coefficient 3.

Avertissements :

L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet.
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation.
- Vérifiez que ce fascicule comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, page de garde comprise.

Exercice 1. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 1.

$$\frac{\left(\mathrm{e}^2\right)^4 \times \sqrt{\mathrm{e}^6}}{\mathrm{e}^5 \times \sqrt{\mathrm{e}^{12}}} =$$

A. 0.

B. 1.

C. e.

D. e^{-2}.

QCM 2.

L'inéquation $|\ln x| > 0$ a pour ensemble des solutions

A. $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

B. $]1;+\infty[$.

C. $]0;1[$.

D. $]0;+\infty[$.

QCM 3.

Dans une université de médecine où la moitié des étudiants travaille sérieusement, 60 % des élèves sont reçus au concours de fin d'année. De plus, parmi ceux qui travaillent sérieusement, 90 % réussissent le concours.

Quelle est la probabilité qu'un étudiant réussisse le concours sachant qu'il n'a pas travaillé sérieusement ?

A. 0,3.

B. 0,15.

C. 0,01.

D. 0,505.

QCM 4.

On pose $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors z^2 est égale à :

A. z^3.

B. $\frac{1}{z}$.

C. $1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

QCM 5.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^2 \ \mathrm{d}x =$$

A. $(\ln 2)^3$.

B. $\ln 2^3$.

C. $\dfrac{(\ln 2)^3}{3}$.

D. $-\dfrac{1}{2^3}$.

QCM 6.

La durée d'efficacité d'un médicament, en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Quel est le paramètre λ de cette loi sachant que $P(X \geqslant 20) = 0{,}3$?

A. $-\dfrac{\ln 0{,}7}{20}$.

B. $\dfrac{\ln 0{,}3}{20}$.

C. $-\dfrac{\ln 0{,}3}{20}$.

D. $20\ln(0{,}3)$.

Exercice 2. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 7

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\mathrm{e}^x - 1)\left(1 - x^2\right) \geqslant 0$ est :

A. $]-\infty;-1[\cup][0,1]$.

B. $[-1;0]\cup[1;+\infty[$.

C. $[0;1]$.

D. $[-1;1]$.

QCM 8

La fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ a pour dérivée :

A. $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{4x}-1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

B. $f'(x) = \dfrac{-4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

C. $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

D. $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

QCM 9

La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$. Laquelle de ces propositions est exacte ?

A. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

B. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}$.

C. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$.

D. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

QCM 10

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1+u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ est

A. croissante.

B. décroissante.

C. convergente vers e.

D. divergente vers $-\infty$.

QCM 11

On lance trois fois un dé équilibré, la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le chiffre 6 est :

A. $\dfrac{1}{6^2}$.

B. $\dfrac{15}{6^3}$.

C. $\dfrac{5}{6^3}$.

D. $\dfrac{2}{6^3}$.

QCM 12

L'équation $x^2 \ln 2 = x^3 \ln 3$ a pour ensemble des solutions :

A. $\left\{0; \ln\dfrac{2}{3}\right\}$.

B. $\left\{0; \dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

D. $\{0\}$.

Exercice 3. (8 points)

Partie A.

Dans un pays une maladie virale est transmise d'un être humain à un autre par un insecte infecté.

Un test a été mis en place pour le dépistage de ce virus. On sait que :

- La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98,
- La probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans la population de ce pays. Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « l'individu est atteint par le virus » ;
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif ».

On notera, $\overline{M}$ l'évènement contraire de M et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

On notera p la proportion de personnes atteintes par le virus dans la population.

1. Calculer $P(T)$.
2. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$.
3. Étudier les variations de f.
4. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte par le virus est supérieure ou égale à 0,95.
   À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?
   Donner la valeur de p sous forme de fraction irréductible.

Partie B.

Dans toute la partie B, un institut sanitaire estime que la probabilité qu'une personne soit atteinte par le virus est 0,15.

On choisit 100 individus au hasard dans cette population. Les tirages sont indépendants.

1. Soit X la variable aléatoire qui, aux 100 individus choisis, associe le nombre de personnes atteintes par le virus.
   Déterminer la loi de probabilité X.

2. Dans l'échantillon précédent, on dénombre 20 personnes atteintes par le virus. Quelle conclusion peut-on tirer à propos de la valeur $p = 0{,}15$ au seuil de 95 % ?
   Aide au calcul : $1{,}96 \times \sqrt{0{,}15 \times 0{,}85} \approx 0{,}70$ *à* 10^{-2} *près.*

Partie C.

Dans cette partie, on suppose p inconnue.
On choisit 100 individus au hasard dans la population. Les tirages sont indépendants. On dénombre 20 personnes atteintes par le virus.
Donner un intervalle de confiance de p au seuil de 95 %.

Partie D.

Le temps d'incubation en heures du virus peut être modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 5.

1. Que vaut $P(15 < Y < 25)$ à 10^{-2} près ?
2. Que vaut $P(Y > 15)$ à 10^{-2} près ?
3. Trouver a tel que $P(Y < a) = 0{,}975$ et interpréter le résultat obtenu.