ESA 2019.

Épreuves d'admissibilité du concours 2016 d'admission à l'école de santé des armées .

Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Mercredi 13 avril 2018.

Épreuve de mathématiques.

Durée : 1 heure 30 minutes

Coefficient 3.

Avertissements :

L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet.
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation.
- Vérifiez que ce fascicule comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, page de garde comprise.

Exercice 1. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0,25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 1.

$$\frac{\left(\mathrm{e}^2\right)^4 \times \sqrt{\mathrm{e}^6}}{\mathrm{e}^5 \times \sqrt{\mathrm{e}^{12}}} =$$

A. 0.

B. 1.

C. e.

D. e^{-2}.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\mathrm{e}^2\right)^4 \times \sqrt{\mathrm{e}^6}}{\mathrm{e}^5 \times \sqrt{\mathrm{e}^{12}}} &= \frac{\mathrm{e}^{2\times 4} \times \left(\mathrm{e}^6\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^5 \times \left(\mathrm{e}^{12}\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^8 \times \mathrm{e}^{6\times\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{12\times\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^8 \times \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^6}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{8+3}}{\mathrm{e}^{5+6}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{11}}{\mathrm{e}^{11}}\\ &= 1\end{aligned}$$

La bonne réponse est B.

QCM 2.

L'inéquation $|\ln x| > 0$ a pour ensemble des solutions

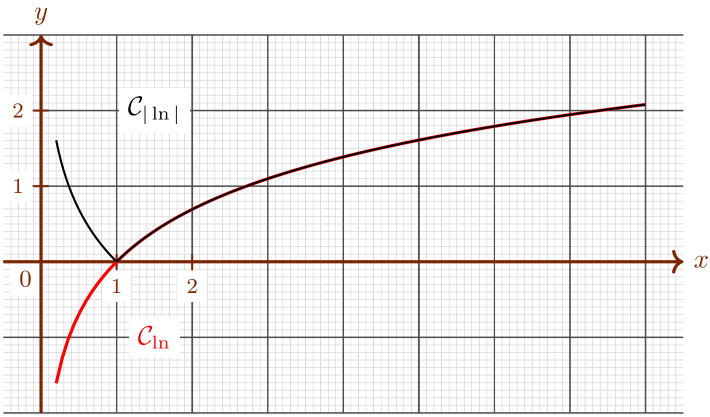
A. $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

B. $]1;+\infty[$.

C. $]0;1[$.

D. $]0;+\infty[$.

En raisonnant graphiquement à partir de la courbe représentative de ln le résultat est immédiat.



La bonne réponse est A.

QCM 3.

Dans une université de médecine où la moitié des étudiants travaille sérieusement, 60 % des élèves sont reçus au concours de fin d'année. De plus, parmi ceux qui travaillent sérieusement, 90 % réussissent le concours.

Quelle est la probabilité qu'un étudiant réussisse le concours sachant qu'il n'a pas travaillé sérieusement ?

A. $0,3$.

B. $0,15$.

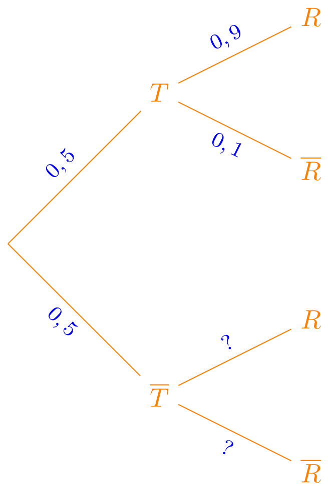
C. $0,01$.

D. $0,505$.

Notons R : « l'élève est reçu » et T : « l'élève à travailler ».

Calculons $\mathbb{P}_{\overline{T}}(R)$.

Un petit schéma pour voir clairement les données dont nous disposons.



Et $\mathbb{P}(R) = 0,6$

$\{T, \overline{T}\}$ constitue un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(T \cap R) + \mathbb{P}(\overline{T} \cap R)$$

Puisque $\mathbb{P}(T) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{T}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(T) \cdot \mathbb{P}_T(R) + \mathbb{P}(\overline{T}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \\ 0,6 &= 0,5 \times 0,9 + 0,5 \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \end{aligned}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0,6 &= 0,45 + 0,5\mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \\ 0,6 - 0,45 &= 0,45 - 0,45 + 0,5\mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \\ 0,15 &= \mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \\ \frac{0,15}{0,5} &= \frac{0,5\mathbb{P}_{\overline{T}}(R)}{0,5} \\ 0,3 &= \mathbb{P}_{\overline{T}}(R) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{T}}(R) = 0,3.}$$

La bonne réponse est A.

QCM 4.

On pose $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors z^2 est égale à :

A. z^3.

B. $\dfrac{1}{z}$.

C. $1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ce qui exclut les réponses C et D.

$z^3 = z^2 z = \overline{z}z = |z|^2 \in \mathbb{R}$ donc $z^3 \neq z^2$. La réponse A est donc exclue.

La bonne réponse est B.

QCM 5.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^2 \ \mathrm{d}x =$$

A. $(\ln 2)^3$.

B. $\ln 2^3$.

C. $\dfrac{(\ln 2)^3}{3}$.

D. $-\dfrac{1}{2^3}$.

Calculons $I = \int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^3 \ \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln'(x)\,(\ln x)^2 \ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{3}\,(\ln x)^3\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3}\,(\ln 2)^3 - \frac{1}{3}\,(\ln 1)^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{3}\,(\ln 2)^3.}$$

La bonne réponse est C.

QCM 6.

La durée d'efficacité d'un médicament, en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Quel est le paramètre λ de cette loi sachant que $P(X \geqslant 20) = 0,3$?

A. $-\dfrac{\ln 0,7}{20}$.

B. $\dfrac{\ln 0,3}{20}$.

C. $-\dfrac{\ln 0,3}{20}$.

D. $20\ln(0,3)$.

Calculons λ.

D'après l'énoncé :

$$0,3 = \mathbb{P}(X \geqslant 20)$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
0,3 &= 1-\mathbb{P}(X<20)\\
0,3 &= 1-\mathbb{P}(X\leqslant 20)\\
0,3 &= 1-\int_0^{20} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{d}t\\
0,3 &= 1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{20}\\
0,3 &= 1+\mathrm{e}^{-\lambda 20}-1\\
0,3 &= \mathrm{e}^{-\lambda 20}\\
\ln(0,3) &= \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda 20}\right)\\
\ln(0,3) &= -\lambda 20\\
\frac{\ln(0,3)}{-20} &= \frac{-\lambda 20}{-20}\\
-\frac{\ln(0,3)}{20} &= \lambda
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\ln(0,3)}{20}.}$$

La bonne réponse est C.

Exercice 2. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0,25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 7

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\mathrm{e}^x-1)\left(1-x^2\right)\geqslant 0$ est :

A. $]-\infty;-1]\cup][0,1]$.

B. $[-1;0]\cup[1;+\infty[$.

C. $[0;1]$.

D. $[-1;1]$.

Étudions le signe de $f : x \mapsto (e^x-1)\left(1-x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x-1)(1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est }]-\infty;-1]\cup[0;1].}$$

$$\boxed{\text{La bonne réponse est A.}}$$

QCM 8

La fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ a pour dérivée :

A. $f'(x) = \dfrac{4e^{4x}-1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

B. $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

C. $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

D. $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

Déterminons f'.

Notons $u(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$. Donc $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ et $v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$. Puisque

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Nous en déduisons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{2x} \times \left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right) - \left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right) \times 2\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{2x} \times \left[\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right) - \left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)\right]}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2} \\ &= \frac{2\mathrm{e}^{2x} \times \left[\mathrm{e}^{2x} + 1 - \mathrm{e}^{2x} + 1\right]}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)^2}.$$

La bonne réponse est D.

QCM 9

La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$. Laquelle de ces propositions est exacte ?

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

B. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}$.

C. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$.

D. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

Étudions la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}} = \mathrm{e}^{-1}$.

La bonne réponse est B.

QCM 10

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1+u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$ est

A. croissante.

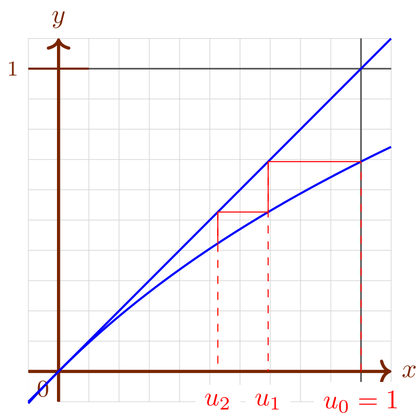
B. décroissante.

C. convergente vers e.

D. divergente vers $-\infty$.

Méthode rapide pour trouver la réponse.

Avec une courbe représentative de $x \mapsto \ln(x+1)$ et la droite d'équation $y = x$ nous pouvons de proche en proche dessiner les termes successifs de la suite.



La bonne réponse est B.

QCM 11

On lance trois fois un dé équilibré, la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le chiffre 6 est :

A. $\dfrac{1}{6^2}$.

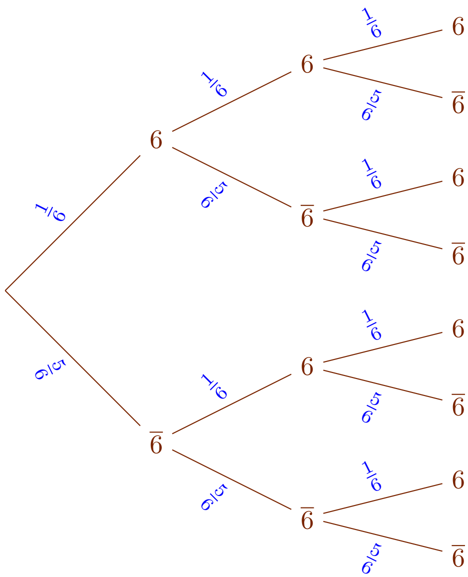
B. $\dfrac{15}{6^3}$.

C. $\dfrac{5}{6^3}$.

D. $\dfrac{2}{6^3}$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

On représente la situation par un arbre pondéré.



Il y a 3 chemins avec exactement 2 fois le 6. D'après le principe multiplicatif la probabilité de l'un des ces chemins est $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$. Donc la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le 6 est : $3 \times \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$.

La bonne réponse est B.

Méthode calculatoire détaillée.

Notons x la variable aléatoire indiquant le nombre de 6 obtenus.

Calculons $\mathbb{P}(X=2)$.

* Épreuve de Bernoulli.
  - Expérience : lancer un dé.
  - Succès : « Obtenir 6 ».
  - Probabilité de succès : $p=\frac{1}{6}$.
* Schéma de Bernoulli.
  L'épreuve de Bernoulli précédemment décrite est répétée à l'identique et de façon indépendante $n=3$ fois.
* Loi binomiale.
  X compte le nombre de 6 parmi les 3 lancés, donc compte le nombre de succès donc : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

X suit une loi binomiale donc

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Donc ici

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2)&=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}\\&=3\times\frac{1}{6^2}\times\frac{5}{6}\\&=\frac{15}{6^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2)=\frac{15}{6^3}.}$$

QCM 12

L'équation $x^2\ln 2 = x^3 \ln 3$ a pour ensemble des solutions :

A. $\left\{0;\ln\frac{2}{3}\right\}$.

B. $\left\{0;\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

D. $\{0\}$.

Résolvons l'équation proposée dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^2 \ln 2 = x^3 \ln 3 &\Leftrightarrow x^2 \ln(2) - x^3 \ln(3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \left[\ln(2) - x \ln(3)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(2) - x\ln(3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(2) = x \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = x \end{aligned}$$

La bonne réponse est B.

Exercice 3. (8 points)

Partie A.

Dans un pays une maladie virale est transmise d'un être humain à un autre par un insecte infecté.

Un test a été mis en place pour le dépistage de ce virus. On sait que :

- La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$,
- La probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans la population de ce pays. Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « l'individu est atteint par le virus » ;
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif ».

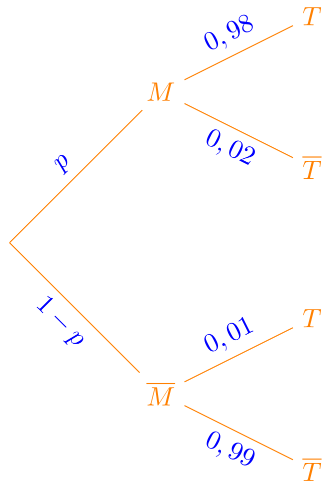
On notera, $\overline{M}$ l'évènement contraire de M et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

On notera p la proportion de personnes atteintes par le virus dans la population.

1. Calculer $P(T)$.

Calculons $\mathbb{P}(T)$.

Schématisons la situation.



Les événements M et $\overline{M}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$$

$\mathbb{P}(M)$ et $\mathbb{P}(\overline{M})$ d'après le contexte sont non nuls, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \\ &= p \times 0,98 + (1-p) \times 0,01\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T) = 0,97p + 0,01.}$$

2. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$.

p étant une proportion nous avons bien $p \in [0;1]$.

Déterminons $\mathbb{P}_T(M)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{0,97p + 0,01}$$

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(M) &= \frac{\mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T)}{0,097 + 0,01} \\ &= \frac{p \times 0,98}{0,097p + 0,01} \\ &= \frac{100 \times 0,98p}{100 \times (0,097p + 0,01)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in [0;1],\ \mathbb{P}_M(T) = \frac{98p}{97p+1}.}$$

3. Étudier les variations de f.

Étudions les variations de f.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 98x$ et $v(x) = 97x + 1$. Puisque u et v sont dérivables et puisque v ne s'annule pas sur $[0;1]$, f est dérivable sur $[0;1]$ et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Comme $u'(x) = 98$ et $v'(x) = 97$, pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{98 \times (97x + 1) - 98x \times 97}{(97x + 1)^2} \\ &= \frac{98 \times 97x + 98 - 98 \times 97x}{(97x + 1)^2} \\ &= \frac{98}{(97x + 1)^2}\end{aligned}$$

Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$:

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;1].}$$

4. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte par le virus est supérieure ou égale à $0,95$.
   À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?
   Donner la valeur de p sous forme de fraction irréductible.

   Résolvons dans $[0;1]$ l'inéquation $\mathbb{P}_T(M) \geqslant 0,95$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(M) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} \geqslant \frac{95}{100} \\ &\Leftrightarrow 98p \times 100 \geqslant (97p+1) \times 95 \quad \text{car } 97p+1>0 \\ &\Leftrightarrow 9800p \geqslant 95 \times 97p + 95\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 9\,7 \\ \times \quad 9\,5 \\ \hline 4\,8\,5 \\ 8\,7\,3\,\cdot \\ \hline 9\,2\,1\,5 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(M) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow 9800p \geqslant 9215p + 95 \\ &\Leftrightarrow 9800p - 9215p \geqslant 95 \\ &\Leftrightarrow (9800 - 9215)p \geqslant 95\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 9\,8\,0\,0 \\ - \quad 9\,2\,1\,5 \\ \hline 5\,8\,5 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(M) \geqslant 0,95 &\Leftrightarrow 585p \geqslant 95 \\ &\Leftrightarrow p \geqslant \frac{95}{585}\end{aligned}$$

Une rapide décomposition en facteurs premiers conduit à : $95 = 5 \times 19$ et $585 = 3^2 \times 5 \times 13$. Par conséquent $\frac{95}{585} = \frac{19}{3^2 \times 13} = \frac{19}{117}$ et cette dernière fraction est une fraction irréductible.

Le test est fiable pour une proportion p supérieure ou égale à $\frac{19}{117}$.

Partie B.

Dans toute la partie B, un institut sanitaire estime que la probabilité qu'une personne soit atteinte par le virus est $0,15$.

On choisit 100 individus au hasard dans cette population. Les tirages sont indépendants.

1. Soit X la variable aléatoire qui, aux 100 individus choisis, associe le nombre de personnes atteintes par le virus.
   Déterminer la loi de probabilité X.

   Justifions que X suit une loi binomiale.

   * Épreuve de Bernoulli.
     - Expérience : choisir un individu au hasard.
     - Succès : « l'individu est malade ».
     - Probabilité de succès : $p = 0,15$.
   * Schéma de Bernoulli.
     L'épreuve de Bernoulli précédemment décrite est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 100$ fois.
   * Loi binomiale.
     X compte le nombre de personnes atteintes par le virus parmi le 100 individus choisis, donc compte le nombre de succès donc :

   $$X \hookrightarrow \mathscr{B}\,(100; 0,15).$$

2. Dans l'échantillon précédent, on dénombre 20 personnes atteintes par le virus. Quelle conclusion peut-on tirer à propos de la valeur $p = 0,15$ au seuil de 95 % ?
   Aide au calcul : $1,96 \times \sqrt{0,15 \times 0,85} \approx 0,70$ *à* 10^{-2} *près.*

   Sans calculatrice nous ne pourront pas utiliser la fonction de répartition de la loi binomiale. Nous pourrions nous contenter de l'intervalle de fluctuation approché usuel : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Cependant l'*aide au calcul* nous incite plutôt à utiliser la loi normale.

D'après le théorème de Moivre-Laplace une suite de variable aléatoire de loi binomiale converge en loi vers une variable de loi normale. Nous allons utiliser l'intervalle de fluctuation correspondant.

On a : $n = 100$, $p = 0,15$.

On vérifie : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(p-1) \geqslant 5$. Donc la fréquence observée du caractère dans l'échantillon appartient avec une probabilité d'environ $0,95$ à l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or :

$$\begin{aligned} p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &= 0,15 - 1,96\frac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{100}} \\ &\approx 0,15 - \frac{0,70}{10} \\ &\approx 0,08 \end{aligned}$$

et

$$p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,22$$

et aussi $f = \frac{20}{100} = 0,2$, donc $f \in [0,08; 0,22]$.

L'échantillon ne permet de remettre en cause la valeur de p au seuil de 95 %.

Partie C.

Dans cette partie, on suppose p inconnue.

On choisit 100 individus au hasard dans la population. Les tirages sont indépendants. On dénombre 20 personnes atteintes par le virus.

Donner un intervalle de confiance de p au seuil de 95 %.

Déterminons un intervalle de confiance.

La fréquence de personne atteintes est $f = 0,2$.
$n = 100 \geqslant 20$, $f \geq 0,2$ et $f \leqslant 0,8$.
Donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Or :

$$\begin{aligned} f - \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0,2 - \frac{1}{\sqrt{100}} \\ &= 0,2 - 0,1 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

et

$$f - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,3$$

donc

$$\boxed{\text{un intervalle de confiance de } p \text{ au seuil de 95 \% est : } [0,1; 0,3].}$$

Partie D.

Le temps d'incubation en heures du virus peut être modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 5.

1. Que vaut $P(15 < Y < 25)$ à 10^{-2} près ?

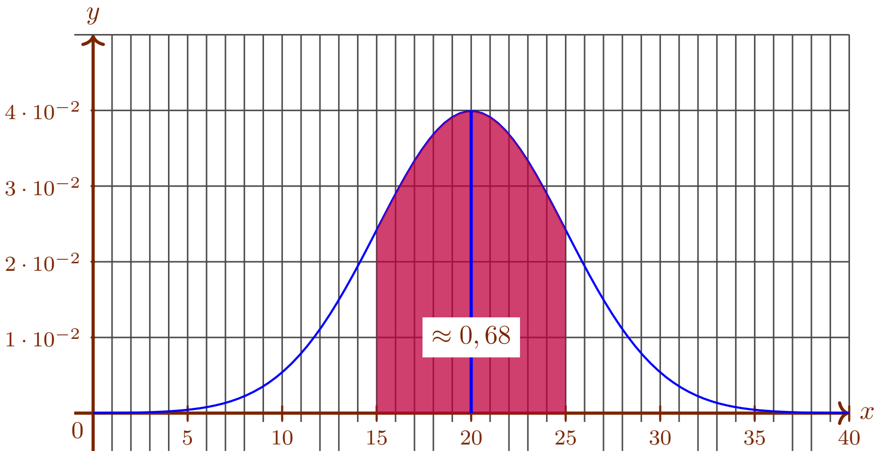
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(15 < Y < 25) &= \mathbb{P}(Y \in]15, 25[) \\ &= \mathbb{P}(Y \in]20 - 5, 20 + 5[) \\ &= \mathbb{P}(Y \in]\mu - \sigma, \mu + \sigma[) \end{aligned}$$

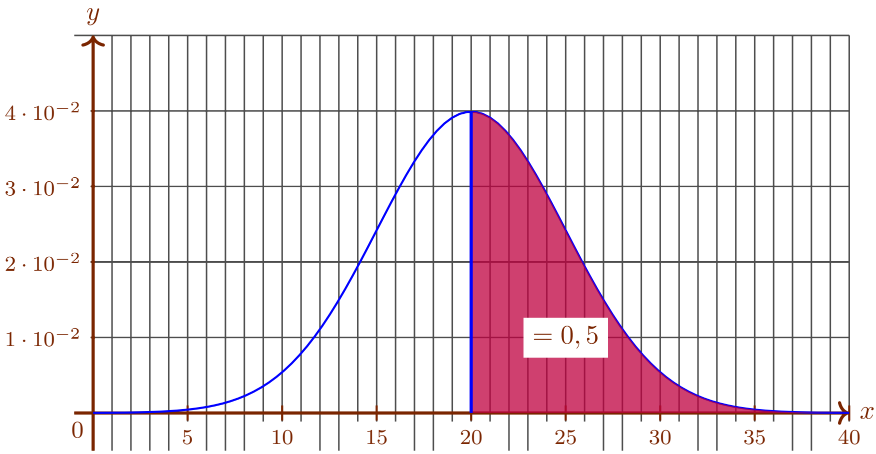
Donc d'après le cours :

$$\boxed{\mathbb{P}(15 < Y < 25) \approx 0,68.}$$

2. Que vaut $P(Y > 15)$ à 10^{-2} près ?

Calculons $\mathbb{P}(Y > 15)$.





Puisque $\{15 < Y \leqslant 20\}$ et $\{20 < Y\}$ sont disjoints :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > 15) &= \mathbb{P}(\{15 < Y \leqslant 20\} \cup \{20 < Y\}) \\
&= \mathbb{P}(15 < Y \leqslant 20) + \mathbb{P}(20 < Y) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(15 < Y < 25) + 0,5 \\
&\approx \frac{1}{2} \times 0,68 + 0,5
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y > 15) \approx 0,84.}$$

3. Trouver a tel que $P(Y < a) = 0,975$ et interpréter le résultat obtenu.

   Déterminons a.

   D'après le cours, pour la variable aléatoire $\frac{Y-20}{5}$ suivant la loi normale centrée réduite

$$\mathbb{P}\left(-1,96 < \frac{Y-20}{5} < 1,96\right) \approx 1 - 0,05$$

   Donc par symétrie de la loi normale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{Y-20}{5} < 1,96\right) &\approx 1 - 0,025 \\
\mathbb{P}\left(\frac{Y-20}{5} < 1,96\right) &\approx 0,975 \\
\mathbb{P}\left(Y < 5 \times 1,96 + 20\right) &\approx 0,975 \\
\mathbb{P}\left(Y < 29,8\right) &\approx 0,975
\end{aligned}$$

   $a \approx 29,8$, autrement dit la probabilité que le temps d'incubation de la maladie soit de $29,8$ heures est $0,975$.