# ESA 2018.

Épreuves d'admissibilité du concours 2016 d'admission à l'école de santé des armées .

Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Mercredi 13 avril 2018.

**Épreuve de mathématiques.**

Durée : 1 heure 30 minutes

Coefficient 3.

Avertissements :

L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet.
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation.
- Vérifiez que ce fascicule comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, page de garde comprise.

## Exercice 1. (6 points)

*Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.*

*On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.*

*Toute réponse juste est comptée* $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0*.*

**QCM 1.**

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est :

A. croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $[0; +\infty[$,

B. croissante sur $\mathbb{R}$,

C. décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0; +\infty[$,

D. décroissante sur $]-\infty; -2[$ et croissante sur $[-2; +\infty[$.

**QCM 2.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$.
La tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 :

A. a pour équation $y = 2{,}5x + 5$,

B. a pour équation $y = 5x$,

C. a pour équation $y = 5x + 10$,

D. est parallèle à l'axe des abscisses.

**QCM 3.**

Les solutions de l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$ sont :

A. $]2; +\infty[$,

B. $]-\infty; 5[$,

C. $]-1; 5[$,

D. $]2; 5[$.

**QCM 4.**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ est égale à :

A. $+\infty$,

B. 1,

C. 0,

D. 2.

**QCM 5.**

On choisit un réel au hasard entre 0 et 5 et l'on note $Y$ la variable aléatoire égale au réel choisi. Alors :

A. $P(Y = 2{,}5) = 0{,}5$,

B. $P(Y \leqslant 2) = 0{,}5$,

C. $P_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) = \frac{1}{3}$,

D. $P_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) = \frac{1}{5}$.

**QCM 6.**

Pour tout nombre réel $x$ non nul, $2 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 2}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$ est égale à :

A. $\dfrac{3\mathrm{e}^{-x} - 4}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$,

B. $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{x}}$,

C. $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 4}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$,

D. $\dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} - 1}$.

## Exercice 2. (6 points)

*Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.*

*On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.*

*Toute réponse juste est comptée* $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* $0$ *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* $0$.

**QCM 7.**

Dans un laboratoire, il y a 50 tubes avec du sang contaminé et 75 tubes avec du sang non contaminé. Un préparateur tire un tube au hasard, regarde si le sang contenu est contaminé et il replace le tube. Il recommence 5 fois l'expérience. On note $X$ le nombre de tubes avec du sang contaminé (sur les 5 tirés).

A. $P(X = 5) = \left(\frac{3}{5}\right)^5$,

B. $E(X) = \frac{2}{5}$,
C. $P(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^5$,
D. $P(X = 0) > P(X = 2)$.

**QCM 8.**

Le domaine de définition de la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x} - 2\right)$ est :
A. $]0; +\infty[$,
B. $]\ln(2); +\infty[$,
C. $]-\infty; -\ln(2)[$,
D. $]0; 2[$.

**QCM 9.**

Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$. Une primitive de la fonction $g$ est la fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
A. $G(x) = (3x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$,
B. $G(x) = (-3x + x^2)\mathrm{e}^{-x}$,
C. $G(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{-x}$,
D. $G(x) = (5 - 2x)\mathrm{e}^{-x}$.

**QCM 10.**

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - x)\ln(x) \geqslant 0$ est :
A. $[1; 3]$,
B. $]0; 3]$,
C. $]-\infty; 3]$,
D. $[1; +\infty[$.

**QCM 11.**

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :
A. $1$,
B. $\frac{1}{2}$,
C. $\frac{\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e})}$,
D. $\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

**QCM 12.**

Une variable aléatoire $X$ suit la loi normale $N(30{,}\sigma^2)$ avec $P(X > 35) = 0{,}4$.

A. $P(X < 30) = 0{,}4$,

B. $P(30 < X < 35) = 0{,}1$,

C. $P(25 < X < 35) = 0{,}3$,

D. $P(X > 40) = 0{,}5$.

## Exercice 3. 8 points

On veut dépister une maladie $m$ dont la fréquence (ou prévalence) dans la population $P$ est notée $p$ avec $0 < p < 1$. On met en place un test diagnostique qui est indépendant de la valeur de $p$.

On prélève au hasard dans la population $P$ un individu ayant été soumis au test diagnostique.

On définit les événements suivants :

$T$ : « le test est positif » et $M$ : « l'individu est malade ».

Pour ce test diagnostique le fabriquant a indiqué :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade, est appelée sensibilité du test et est notée $S_e$.
- la probabilité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$ qu'un individu ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade est appelée spécificité du test et est notée $S_p$.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré en complétant toutes les branches à l'aide de $p$, $S_e$ et $S_p$.

2. (a) Exprimer $P(M \cap T)$, $P(M \cap \overline{T})$, $P(\overline{M} \cap T)$, $P(\overline{M} \cap \overline{T})$ à l'aide de $p$, $S_e$ et $S_p$.

   (b) Montrer que la probabilité que le test délivre une juste conclusion est : $p(S_e - S_p) + S_p$.

3. On appelle

   - valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
   - valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.

(a) Calculer $P(T)$ à l'aide de $p$, $S_e$ et $S_p$.

(b) Exprimer VPP et VPN en fonction de $p$, $S_e$ et $S_p$.

(c) Le test est considéré comme intéressant si VPP $> p$. Montrer alors que : $S_e + S_p > 1$.

4. La prévalence $p$ du paludisme est de 90 % en Tanzanie et de 0,001 en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $S_e = 0{,}9$ et pour spécificité $S_p = 0{,}8$. Cela est valable pour toute la question 4.

   (a) Calculer la VPP en Tanzanie arrondie à $10^{-2}$ près.

   On admet que $\text{VPP}_{France} = 0$ ; $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0{,}47$ ; $\text{VPN}_{France} = 1$.

   (b) En déduire ce que l'on peut dire en terme de probabilité à un patient de Tanzanie et à un patient français selon que le test est positif ou négatif.

   (c) On considère la fonction $v$ définie par $v(p) = P_T(M)$.

      i. Donner l'expression de $v(p)$ en fonction de $p$.

      ii. Donner le sens de variation de la fonction $v$.

      iii. Lorsque $p$ est supérieur à 0,8, en quoi la positivité du test est-elle un élément important du diagnostique ?