ESA 2018.

Exercice 1. (6 points)

QCM 1.

Nous pourrions remarquer $f = 2\cosh$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

f est paire donc ses variations sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont contraires ce qui exclu B et comme sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées la réponse D est également à exclure.

De plus : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ donc nécessairement f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La réponse est C.

Nous pourrions déterminer le sens de variation de f.

QCM 2.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

La tangente au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(0; f(0))$. Or $f(0) = 5$ donc les coordonnées $(0; 5)$ doivent satisfaire l'équation de la tangente ce qui laisse A et D.

Comme $f'(x) = (2x + 2{,}5)\mathrm{e}^{0{,}2x^2+0{,}5x}$, $f'(0) = 2{,}5$ la tangente n'est donc pas horizontale.

La réponse est A.

Plus classiquement il est possible de retrouver l'équation de la tangente.

Déterminons l'équation de la tangente.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

* $a = 0$.
* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée d'exponentielle et de fonction polynomiale et pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times (2 \times 0{,}2x + 0{,}5)\mathrm{e}^{0{,}2x^2+0{,}5x} \\ &= 5(0{,}4x + 0{,}5)\mathrm{e}^{0{,}2x^2+0{,}5x} \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(0) = 2{,}5$$

* $f(0) = 5$.

Nous déduisons des points précédents

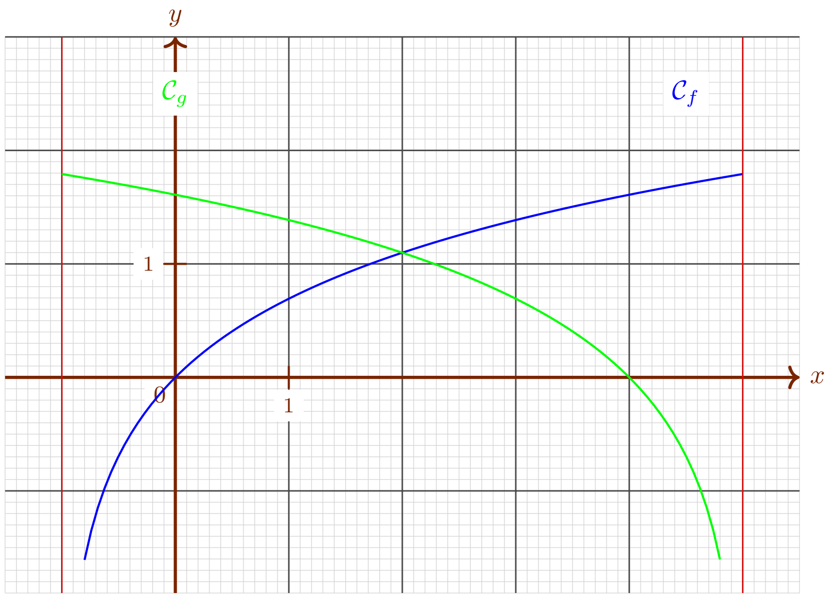
$$y = 2{,}5 \times (x - 0) + 5.$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est : $y = 2{,}5x + 5$.

QCM 3.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

Il est possible de retrouver l'allure des courbes représentatives de $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et $g : x \mapsto \ln(-x+5)$ à partir de celle de ln par translation et symétrie :



Le schéma permet de voir que l'inéquation n'a de sens que sur $]-1{,}5[$.

D'autre part lecture graphique les solutions sont les réels strictement plus grands que la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ d'inconnue x.

La réponse est D.

Plus classiquement il est possible de résoudre l'inéquation par analyse-synthèse.

Résolvons l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$.

La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression $\ln(-x+5)$ n'a de sens que si $-x+5>0$, autrement dit si et seulement si $x \in]-\infty,5[$.
De même $\ln(x+1)$ n'a de sens que si $x \in]-1,+\infty[$.
Ainsi l'inéquation n'a de sens que si : $x \in]\infty,5[\cap]-1,+\infty[=]-1,5[$.

* Supposons qu'il existe $x \in]-1,5[$ vérifiant $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante elle conserve l'ordre donc

$$\exp\left[\ln(-x+5)\right] > \exp\left[\ln(x+1)\right]$$

exp et ln étant des fonctions réciproques l'une de l'autre (il est également possible d'arguer ici de la stricte croissance le ln) :

$$-x+5 > x+1$$

Enfin :

$$x > 2$$

Et donc :

$$x \in]2,5[$$

* Du fait de la stricte croissance de ln il est aisé de vérifier que si $x \in]2,5[$ alors x est bien une solution de l'inéquation.

Nous avons démontré par analyse-synthèse que $]2,5[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

QCM 4.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
On utilise ici l'astuce des quantités conjuguées :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}^2-\sqrt{x^2-1}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2x}\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

la notation $\underset{x\to+\infty}{\sim}$ qui indique une équivalence asymptotique peut se traduire ici comme « a la même limite que ».

Et comme $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, finalement $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La réponse est C.

QCM 5.

Le fait de choisir un réel dans un segment correspond à une loi uniforme.

Pour les lois continues la probabilité que la variable aléatoire égale un nombre est nulle : $\mathbb{P}(Y=2{,}5)=0$. Donc la réponse A est exclue.

Le calcul de $\mathbb{P}_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3)$ permettra donc de décider de la bonne réponse.

$$\mathbb{P}_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3)=\mathbb{P}(2\leqslant Y\leqslant 3)$$

Et puisque Y suit une loi uniforme sur $[0{,}5]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{Y\geqslant 2}(Y\leqslant 3) &= \frac{3-2}{5-0}\\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est D.

QCM 6.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
Pour $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ la quantité proposée égale

$$\begin{aligned}
2 - \frac{e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 2}{e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 1} &= 2 - \frac{e^{\ln(3)} - 2}{e^{\ln(3)} - 1} \\
&= 2 - \frac{3-2}{3-1} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

En évaluant le différentes propositions pour $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ nous obtenons une seule expression qui convienne.

La réponse est B.

La réponse se trouve aussi rapidement en travaillant directement avec l'expression proposée.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
2 - \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} &= \frac{2(e^{-x} - 1)}{e^{-x} - 1} - \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} \\
&= \frac{2e^{-x} - 2 - (e^{-x} - 1)}{e^{-x} - 2} \\
&= \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} \\
&= \frac{e^{-x}}{e^{-x}\left(1 - e^{x}\right)} \\
&= \frac{1}{1 - e^{x}}
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2 - \frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1} = \frac{1}{1-e^{x}}.$

Exercice 2. (6 points)

QCM 7.

Justifions que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli.

- Expérience : tirer au hasard un tube.
- Succès : « Le sang est contaminé ».
- Probabilité de succès : $p = \frac{50}{50+75} = \frac{2}{5}$.

* Schéma de Bernoulli.
L'épreuve de Bernoulli précédemment décrite est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 5$ fois.

* Loi binomiale.
X compte le nombre de tube contaminé parmi les 5, donc compte le nombre de succès donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \tfrac{2}{5}\right).}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = 5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(1 - \frac{2}{5}\right)^{5-5} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^5\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= np \\ &= 5 \times \frac{2}{5} \\ &= 2\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= \binom{5}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-0}\\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^5\end{aligned}$$

La réponse est C.

QCM 8.

Déterminons le domaine de définition de f.

La difficulté vient de ce que ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il faut donc, successivement, que

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x}-2 &> 0\\ \mathrm{e}^{-x} &> 2\\ \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) &> \ln(2) \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ -x &> \ln(2)\\ x &< -\ln(2)\end{aligned}$$

Nécessairement $x \in]-\infty, -\ln(2)[$.
On vérifie de même que f est bien définie sur $]-\infty, -\ln(2)[$.

Le domaine de définition de f est $]-\infty, -\ln(2)[$.

La bonne réponse est C.

QCM 9.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

En dérivant une fonction avec un terme en $x^2\mathrm{e}^{-x}$ nous obtenons une fonction avec un terme en $-x^2\mathrm{e}{-x}$, ce qui ne convient pas. Les réponses A et B sont exclues.

En dérivant une fonction avec un terme en $-2x\mathrm{e}^{-x}$ nous obtenons une fonction avec un terme en $2x\mathrm{e}{-x}$, ce qui ne convient pas. La réponse D est exclue.

La bonne réponse est C.

Plus prosaïquement il est possible de dériver les fonctions proposées (qui sont des produits de fonctions dérivables) une à une jusqu'à obtenir g.

QCM 10.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
Un tableau de signe fera l'affaire.

x	0		1		3		$+\infty$
$\ln$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3-x)\ln$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

La bonne réponse est A.

QCM 11.

Calculons $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}t$.

On notant $u(x)=1+\mathrm{e}^x$ nous remarquons que :

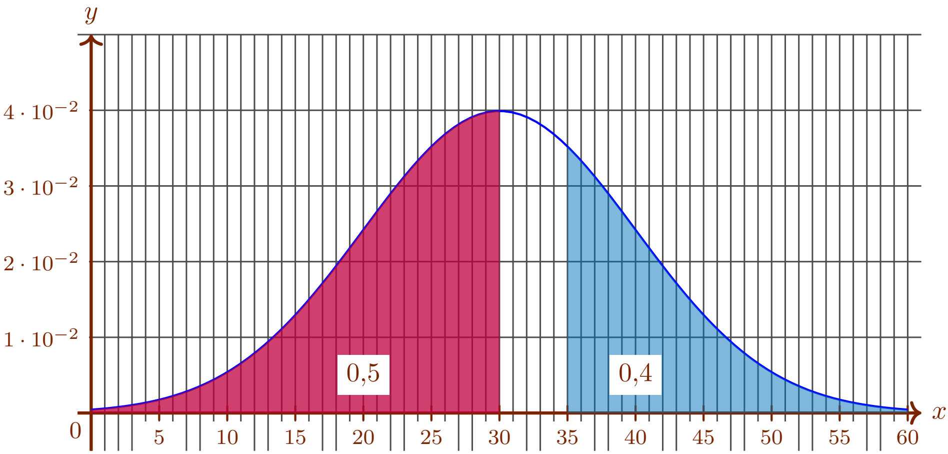
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= [\ln(|u(t)|)]_0^1 \\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}^1\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^0\right) \\ &= \ln(1+\mathrm{e})-\ln(2) \end{aligned}$$

$I=\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

La bonne réponse est D.

QCM 12.

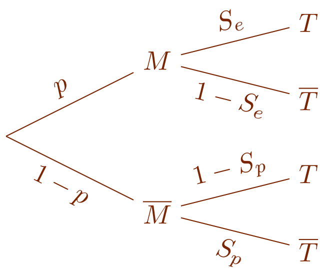
Méthode pour trouver rapidement la réponse.
La situation peut être schématisée par :



La probabilité de l'univers tout entier valant 1 nous concluons.

La bonne réponse est B.

Exercice 3. 8 points



1.

2. (a) Déterminons les probabilités en fonction de p, S_e et S_p.

Puisque $\mathbb{P}(M) > 0$ nous pouvons utiliser la formule des probabilité composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap T) &= \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) \\ &= p \cdot S_e\end{aligned}$$

Concrètement il suffit de regarder le chemin MT sur l'arbre pondéré et d'utiliser le principe multiplicatif.

En procédant de même pour les autres cas :

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbb{P}(M \cap T) = p \cdot S_e, \\ \mathbb{P}(M \cap \overline{T}) = p(1 - S_e), \\ \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) = (1 - p)(1 - S_p), \\ \mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{T}) = (1 - p)S_p.\end{gathered}}$$

(b) Notons A l'événement « le test délivre une juste conclusion ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Dire que la conclusion du test est juste signifie soit que le test est positif et l'individu est malade $(M \cap T)$, soit le test est négatif est l'individu n'est pas malade $(\overline{M} \cap \overline{T})$. Autrement dit

$$A = (M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap \overline{T}\right).$$

Puisque M et $\overline{M}$ sont incompatibles, les événements $M \cap T$ et $\overline{M} \cap \overline{T}$ le sont aussi et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left[(M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left(M \cap T\right) + \mathbb{P}\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)\end{aligned}$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= p \cdot S_e + (1 - p)S_p \\ &= p \cdot S_e + S_p - p \cdot S_p \\ &= p(S_e - S_p) + S_p\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = p(S_e - S_p) + S_p.}$$

3. (a) En regardant l'arbre nous voyons que T correspond à deux chemins dont nous additionnerons les probabilités.

Calculons $\mathbb{P}(T)$.

M et $\overline{M}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilité totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$$

D'après la formule des probabilités composées (car $\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{M}) > 0$) :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(T) = p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p).}$$

(b) Déterminons VPP.

$$\text{VPP} = \mathbb{P}_T(M)$$

Puisque $\mathbb{P}(T) > 0$:

$$\text{VPP} = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

D'après les questions précédentes :

$$\boxed{\text{VPP} = \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)}.}$$

Déterminons VPN.

De même

$$\begin{aligned}
\text{VPN} &= \mathbb{P}_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} \\
&= \frac{(1-p)S_p}{1 - \mathbb{P}(T)}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\text{VPN} = \frac{(1-p)S_p}{1-[p\cdot S_e+(1-p)(1-S_p)]}.}$$

(c) Supposons que VPP $> p$ et démontrons qu'alors $S_e + S_p > 1$.

Nous déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \text{VPP} &> p \\ \frac{p\cdot S_e}{p\cdot S_e+(1-p)(1-S_p)} &> p \end{aligned}$$

Comme les nombres considérés sont tous positifs (ce sont des sommes de probabilités) :

$$\begin{aligned} p\cdot S_e &> p\,[p\cdot S_e+(1-p)(1-S_p)] \\ S_e &> p\cdot S_e+(1-p)(1-S_p) \\ S_e - p\cdot S_e &> (1-p)(1-S_p) \\ (1-p)S_e &> (1-p)(1-S_p) \\ S_e &> 1-S_p \\ S_e+S_p &> 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\text{si VPP} > 1, \text{ alors } S-e+S_p > 1.}$$

4. (a) D'après la question 3.(b)

$$\begin{aligned} \text{VPP}_{Tanzanie} &= \frac{p\cdot S_e}{p\cdot S_e+(1-p)(1-S_p)} \\ &= \frac{0{,}9\times 0{,}9}{0{,}9\times 0{,}9+(1-0{,}9)(1-0{,}8)} \\ &= \frac{0{,}81}{0{,}81+0{,}1\times 0{,}2} \\ &= \frac{0{,}81}{0{,}83} \\ &= \frac{81}{83} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l}
81 & 83 \\
\underline{-\ \ 0} & \overline{0{,}975} \\
810 & \\
\underline{-747} & \\
630 & \\
\underline{-581} & \\
490 & \\
\underline{-415} & \\
75 &
\end{array}
$$

Donc :

$$\boxed{\text{VPP} \approx 0{,}97 \text{ en arrondissant au centième.}}$$

(b) * En Tanzanie.

— Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{Tanzanie} \approx 0{,}97$ est très élevée, alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement malade.

— Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0{,}47$ est plutôt faible, alors il faut dire au patient que nous n'avons pas pu vérifier s'il est malade (ce qui ne signifie pas qu'il ne l'est pas).

* En France.

— Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{France} = 0$ alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement victime d'un faux positif.

— Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{France} = 0{,}47$, alors il faut dire au patient qu'il n'est pas malade.

(c) i. Déterminons l'expression de v en fonction de p.

D'après la question 3.(b)

$$
\begin{aligned}
v(p) &= \mathbb{P}_T(M) \\
&= \text{VPP} \\
&= \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} \\
&= \frac{0{,}9p}{0{,}9p + (1-p)(1-0{,}8)} \\
&= \frac{0{,}9p}{0{,}9p + 0{,}2 - 0{,}2p} \\
&= \frac{0{,}9p}{0{,}7p + 0{,}2}
\end{aligned}
$$

Enfin

$$\boxed{v(p) = \frac{9p}{7p+2} \text{ quelque soit } p \in]0;1[.}$$

ii. Étudions le variations de v sur $]0;1[$.

Si nous notons $f(x) = 9x$ et $g(x) = 7x+2$, alors nous pouvons écrire v comme un quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $]0;1[$: $v = \frac{f}{g}$.
Par conséquent v est dérivables sur $]0;1[$ et

$$v' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ainsi pour tout x réel :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{9 \times (7x+2) - 9x \times 7}{(7x+2)^2} \\ &= \frac{18}{(7x+2)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent $v' > 0$ sur $]0;1[$ et

$$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur }]0;1[.}$$

iii. Si $p \geqslant 0{,}8$ alors, puisque v est strictement croissante sur $]0;1[$

$$v(p) \geqslant v(0{,}8).$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} v(p) &\geqslant \frac{9 \times 0{,}8}{7 \times 0{,}8 + 2} \\ &\geqslant \frac{7{,}2}{7{,}6} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & 7 & 2 & & & 7\,6 \\ \cline{6-6}
 & & 0 & & & 0,9\,4\,7 \\ \cline{2-3}
- & 7 & 2 & 0 & & \\
 & 6 & 8 & 4 & & \\ \cline{2-4}
 & - & 3 & 6 & 0 & \\
 & & 3 & 0 & 4 & \\ \cline{3-5}
 & & - & 5\,6 & 0 & \\
 & & & 5\,3 & 2 & \\ \cline{4-5}
 & & & 2 & 8 &
\end{array}
$$

Et donc $v(p) \geqslant 0{,}94$.

Si $p \geqslant 0{,}8$, alors la positivité indique avec ne forte probabilité que la personne est effectivement malade.