ESA 2018.

Épreuves d'admissibilité du concours 2018 d'admission à l'école de santé des armées .

Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Mercredi 13 avril 2018.

Épreuve de mathématiques.

Durée : 1 heure 30 minutes

Coefficient 3.

Avertissements :

L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet.
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation.
- Vérifiez que ce fascicule comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, page de garde comprise.

Exercice 1. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0,25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 1.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est :

A. croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $[0; +\infty[$,

B. croissante sur $\mathbb{R}$,

C. décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0; +\infty[$,

D. décroissante sur $]-\infty; -2[$ et croissante sur $[-2; +\infty[$.

Nous pourrions remarquer $f = 2\cosh$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
f est paire donc ses variations sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ sont contraires ce qui exclu B et comme sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées la réponse D est également à exclure.
De plus : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\rightarrow} +\infty$ donc nécessairement f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La réponse est C.

Nous pourrions déterminer le sens de variation de f.

QCM 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 :

A. a pour équation $y = 2,5x + 5$,

B. a pour équation $y = 5x$,

C. a pour équation $y = 5x + 10$,

D. est parallèle à l'axe des abscisses.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
La tangente au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(0; f(0))$. Or $f(0) = 5$ donc les coordonnées $(0; 5)$ doivent satisfaire l'équation de la tangente ce qui laisse A et D.
Comme $f'(x) = (2x + 2,5)\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x}$, $f'(0) = 2,5$ la tangente n'est donc pas horizontale.

La réponse est A.

Plus classiquement il est possible de retrouver l'équation de la tangente.

Déterminons l'équation de la tangente.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

* $a = 0$.
* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée d'exponentielle et de fonction polynomiale et pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times (2 \times 0,2x + 0,5)\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x} \\ &= 5(0,4x + 0,5)\mathrm{e}^{0,2x^2+0,5x} \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(0) = 2,5$$

* $f(0) = 5$.

Nous déduisons des points précédents

$$y = 2,5 \times (x - 0) + 5.$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est : $y = 2,5x + 5$.

QCM 3.

Les solutions de l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$ sont :

A. $]2; +\infty[$,

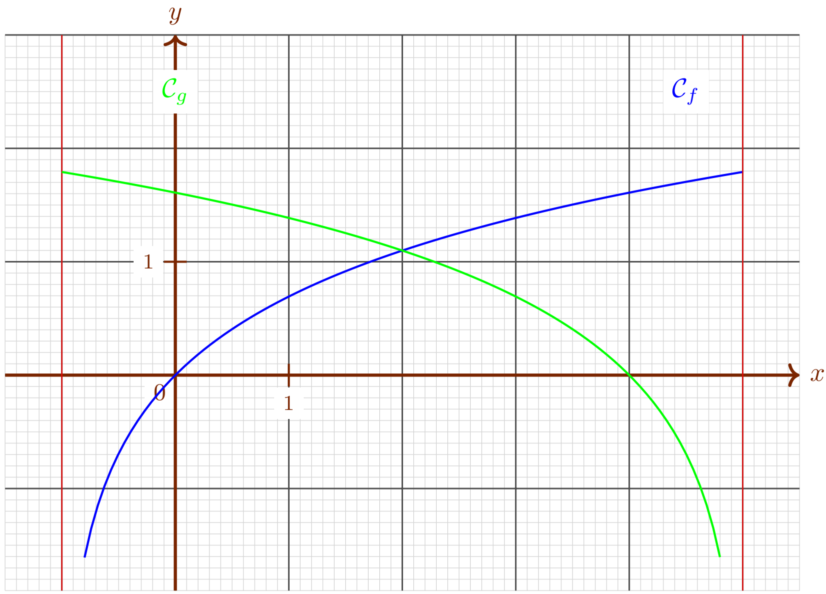
B. $]-\infty; 5[$,

C. $]-1; 5[$,

D. $]2; 5[$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

Il est possible de retrouver l'allure des courbes représentatives de $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et $g : x \mapsto \ln(-x+5)$ à partir de celle de ln par translation et symétrie :



Le schéma permet de voir que l'inéquation n'a de sens que sur $]-1,5[$.

D'autre part lecture graphique les solutions sont les réels strictement plus grands que la solution de l'équation $f(x)=g(x)$ d'inconnue x.

La réponse est D.

Plus classiquement il est possible de résoudre l'inéquation par analyse-synthèse.

Résolvons l'inéquation $\ln(-x+5)<\ln(x+1)$.

La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'expression $\ln(-x+5)$ n'a de sens que si $-x+5>0$, autrement dit si et seulement si $x\in]-\infty,5[$.

De même $\ln(x+1)$ n'a de sens que si $x\in]-1,+\infty[$.

Ainsi l'inéquation n'a de sens que si : $x\in]\infty,5[\cap]-1,+\infty[=]-1,5[$.

* Supposons qu'il existe $x\in]-1,5[$ vérifiant $\ln(-x+5)<\ln(x+1)$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante elle conserve l'ordre donc

$$\exp\left[\ln(-x+5)\right]>\exp\left[\ln(x+1)\right]$$

exp et ln étant des fonctions réciproques l'une de l'autre (il est également possible d'arguer ici de la stricte croissance le ln) :

$$-x+5>x+1$$

Enfin :

$$x > 2$$

Et donc :

$$x \in]2, 5[$$

* Du fait de la stricte croissance de ln il est aisé de vérifier que si $x \in]2, 5[$ alors x est bien une solution de l'inéquation.

> Nous avons démontré par analyse-synthèse que $]2, 5[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

QCM 4.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ est égale à :

A. $+\infty$,

B. 1,

C. 0,

D. 2.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
On utilise ici l'astuce des quantités conjuguées :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - \sqrt{x^2-1}^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \\
&\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} \\
&\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{2x} \\
&\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

la notation $\underset{x \to +\infty}{\sim}$ qui indique une équivalence asymptotique peut se traduire ici comme « a la même limite que ».

Et comme $\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, finalement $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La réponse est C.

QCM 5.

On choisit un réel au hasard entre 0 et 5 et l'on note Y la variable aléatoire égale au réel choisi. Alors :

A. $P(Y = 2,5) = 0,5$,

B. $P(Y \leqslant 2) = 0,5$,

C. $P_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) = \frac{1}{3}$,

D. $P_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) = \frac{1}{5}$.

Le fait de choisir un réel dans un segment correspond à une loi uniforme.

Pour les lois continues la probabilité que la variable aléatoire égale un nombre est nulle : $\mathbb{P}(Y = 2,5) = 0$. Donc la réponse A est exclue.

Le calcul de $\mathbb{P}_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3)$ permettra donc de décider de la bonne réponse.

$$\mathbb{P}_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) = \mathbb{P}(2 \leqslant Y \leqslant 3)$$

Et puisque Y suit une loi uniforme sur $[0,5]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Y \geqslant 2}(Y \leqslant 3) &= \frac{3-2}{5-0} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La bonne réponse est D.

QCM 6.

Pour tout nombre réel x non nul, $2 - \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ est égale à :

A. $\dfrac{3e^{-x} - 4}{e^{-x} - 1}$,

B. $\dfrac{1}{1 - e^{x}}$,

C. $\dfrac{e^{-x} - 4}{e^{-x} - 1}$,

D. $\dfrac{3e^{-x}}{e^{-x} - 1}$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
Pour $x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ la quantité proposée égale

$$\begin{aligned} 2 - \frac{e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 2}{e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 1} &= 2 - \frac{e^{\ln(3)} - 2}{e^{\ln(3)} - 1} \\ &= 2 - \frac{3 - 2}{3 - 1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

En évaluant le différentes propositions pour $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ nous obtenons une seule expression qui convienne.

La réponse est B.

La réponse se trouve aussi rapidement en travaillant directement avec l'expression proposée.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}2-\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1} &= \frac{2(e^{-x}-1)}{e^{-x}-1}-\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}\\ &= \frac{2e^{-x}-2-(e^{-x}-1)}{e^{-x}-2}\\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}\\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}\left(1-e^{x}\right)}\\ &= \frac{1}{1-e^{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 2-\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=\frac{1}{1-e^{x}}.}$$

Exercice 2. (6 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0,25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 7.

Dans un laboratoire, il y a 50 tubes avec du sang contaminé et 75 tubes avec du sang non contaminé. Un préparateur tire un tube au hasard, regarde si le sang contenu est contaminé et il replace le tube. Il recommence 5 fois l'expérience. On note X le nombre de tubes avec du sang contaminé (sur les 5 tirés).

A. $P(X=5)=\left(\frac{3}{5}\right)^5$,

B. $E(X)=\frac{2}{5}$,

C. $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^5$,

D. $P(X=0)>P(X=2)$.

Justifions que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli.
  - Expérience : tirer au hasard un tube.
  - Succès : « Le sang est contaminé ».
  - Probabilité de succès : $p = \frac{50}{50+75} = \frac{2}{5}$.
* Schéma de Bernoulli.
  L'épreuve de Bernoulli précédemment décrite est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 5$ fois.
* Loi binomiale.
  X compte le nombre de tube contaminé parmi les 5, donc compte le nombre de succès donc

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \tfrac{2}{5}\right).}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \mathbb{P}(X = 5) &= \binom{5}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-5} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^5\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= np \\ &= 5 \times \frac{2}{5} \\ &= 2\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \binom{5}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(1-\frac{2}{5}\right)^{5-0} \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^5\end{aligned}$$

La réponse est C.

QCM 8.

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(e^{-x} - 2\right)$ est :

A. $]0; +\infty[$,

B. $]\ln(2); +\infty[$,

C. $]-\infty; -\ln(2)[$,

D. $]0; 2[$.

Déterminons le domaine de définition de f.

La difficulté vient de ce que ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il faut donc, successivement, que

$$\begin{aligned} e^{-x} - 2 &> 0 \\ e^{-x} &> 2 \\ \ln\left(e^{-x}\right) &> \ln(2) \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ -x &> \ln(2) \\ x &< -\ln(2) \end{aligned}$$

Nécessairement $x \in]-\infty, -\ln(2)[$.
On vérifie de même que f est bien définie sur $]-\infty, -\ln(2)[$.

Le domaine de définition de f est $]-\infty, -\ln(2)[$.

La bonne réponse est C.

QCM 9.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3 - 2x)e^{-x}$. Une primitive de la fonction g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $G(x) = (3x - x^2)e^{-x}$,

B. $G(x) = (-3x + x^2)e^{-x}$,

C. $G(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$,

D. $G(x) = (5-2x)\mathrm{e}^{-x}$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

En dérivant une fonction avec un terme en $x^2\mathrm{e}^{-x}$ nous obtenons une fonction avec un terme en $-x^2\mathrm{e}{-x}$, ce qui ne convient pas. Les réponses A et B sont exclues.

En dérivant une fonction avec un terme en $-2x\mathrm{e}^{-x}$ nous obtenons une fonction avec un terme en $2x\mathrm{e}{-x}$, ce qui ne convient pas. La réponse D est exclue.

La bonne réponse est C.

Plus prosaïquement il est possible de dériver les fonctions proposées (qui sont des produits de fonctions dérivables) une à une jusqu'à obtenir g.

QCM 10.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-x)\ln(x) \geqslant 0$ est :

A. $[1;3]$,

B. $]0;3]$,

C. $]-\infty;3]$,

D. $[1;+\infty[$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.

Un tableau de signe fera l'affaire.

x	0		1		3		$+\infty$
ln	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3-x)\ln$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

La bonne réponse est A.

QCM 11.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A. 1,

B. $\frac{1}{2}$,

C. $\frac{\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e})}$,

D. $\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

Calculons $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}t$.

On notant $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$ nous remarquons que :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln\left(|u(t)|\right)\right]_0^1 \\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}^1\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^0\right) \\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}\right) - \ln(2) \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).}$$

La bonne réponse est D.

QCM 12.

Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(30, \sigma^2)$ avec $P(X > 35) = 0,4$.

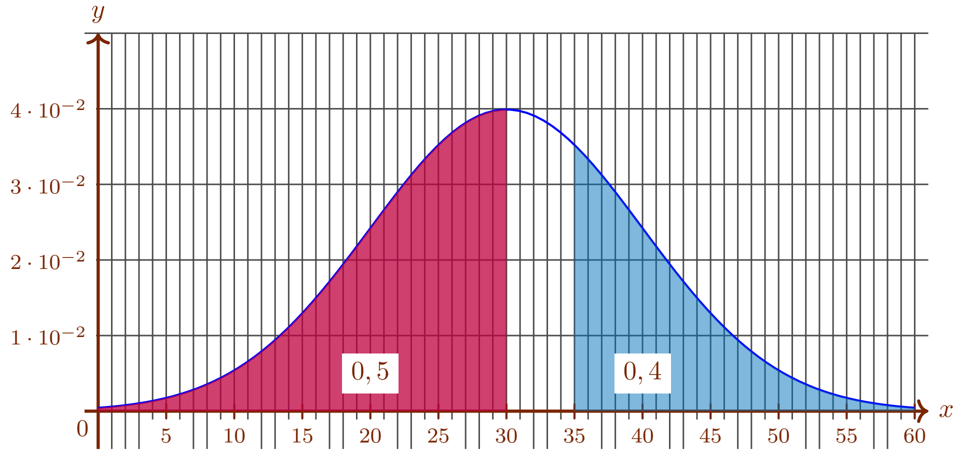
A. $P(X < 30) = 0,4$,

B. $P(30 < X < 35) = 0,1$,

C. $P(25 < X < 35) = 0,3$,

D. $P(X > 40) = 0,5$.

Méthode pour trouver rapidement la réponse.
La situation peut être schématisée par :



La probabilité de l'univers tout entier valant 1 nous concluons.

> La bonne réponse est B.

Exercice 3. 8 points

On veut dépister une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population P est notée p avec $0 < p < 1$. On met en place un test diagnostique qui est indépendant de la valeur de p.

On prélève au hasard dans la population P un individu ayant été soumis au test diagnostique.

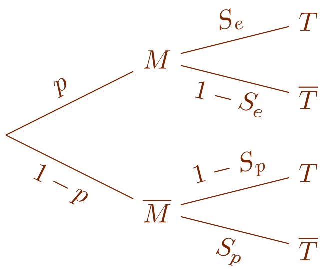
On définit les événements suivants :

T : « le test est positif » et M : « l'individu est malade ».

Pour ce test diagnostique le fabriquant a indiqué :

- la probabilité $P_M(T)$ qu'un individu ait un test positif sachant qu'il est malade, est appelée sensibilité du test et est notée S_e.
- la probabilité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$ qu'un individu ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade est appelée spécificité du test et est notée S_p.

1. Illustrer la situation par un arbre pondéré en complétant toutes les branches à l'aide de p, S_e et S_p.



2. (a) Exprimer $P(M \cap T)$, $P(M \cap \overline{T})$, $P(\overline{M} \cap T)$, $P(\overline{M} \cap \overline{T})$ à l'aide de p, S_e et S_p.

Déterminons les probabilités en fonction de p, S_e et S_p.

Puisque $\mathbb{P}(M) > 0$ nous pouvons utiliser la formule des probabilité composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap T) &= \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) \\ &= p \cdot S_e\end{aligned}$$

Concrètement il suffit de regarder le chemin MT sur l'arbre pondéré et d'utiliser le principe multiplicatif.

En procédant de même pour les autres cas :

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbb{P}(M \cap T) = p \cdot S_e, \\ \mathbb{P}(M \cap \overline{T}) = p(1 - S_e), \\ \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) = (1 - p)(1 - S_p), \\ \mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{T}) = (1 - p)S_p.\end{gathered}}$$

(b) Montrer que la probabilité que le test délivre une juste conclusion est : $p(S_e - S_p) + S_p$.

Notons A l'événement « le test délivre une juste conclusion ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Dire que la conclusion du test est juste signifie soit que le test est positif et l'individu est malade $(M \cap T)$, soit le test est négatif est l'individu n'est pas malade $(\overline{M} \cap \overline{T})$. Autrement dit

$$A = (M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap \overline{T}\right).$$

Puisque M et $\overline{M}$ sont incompatibles, les événements $M \cap T$ et $\overline{M} \cap \overline{T}$ le sont aussi et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left[(M \cap T) \cup \left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)\right] \\ &= \mathbb{P}\left(M \cap T\right) + \mathbb{P}\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)\end{aligned}$$

Et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= p \cdot S_e + (1-p)S_p \\ &= p \cdot S_e + S_p - p \cdot S_p \\ &= p(S_e - S_p) + S_p\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = p(S_e - S_p) + S_p.}$$

3. On appelle
   - valeur prédictive positive du test (VPP), la probabilité $P_T(M)$ d'être malade, sachant que le test est positif.
   - valeur prédictive négative du test (VPN), la probabilité $P_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right)$ d'être non malade, sachant que le test est négatif.

   (a) Calculer $P(T)$ à l'aide de p, S_e et S_p.

   En regardant l'arbre nous voyons que T correspond à deux chemins dont nous additionnerons les probabilités.

   Calculons $\mathbb{P}(T)$.

   M et $\overline{M}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilité totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)$$

   D'après la formule des probabilités composées (car $\mathbb{P}(M) > 0$ et $\mathbb{P}(\overline{M}) > 0$) :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)$$

   Enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(T) = p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p).}$$

(b) Exprimer VPP et VPN en fonction de p, S_e et S_p.

Déterminons VPP.

$$\text{VPP} = \mathbb{P}_T(M)$$

Puisque $\mathbb{P}(T) > 0$:

$$\text{VPP} = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

D'après les questions précédentes :

$$\boxed{\text{VPP} = \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)}.}$$

Déterminons VPN.

De même

$$\begin{aligned} \text{VPN} &= \mathbb{P}_{\overline{T}}\left(\overline{M}\right) \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{M} \cap \overline{T}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} \\ &= \frac{(1-p)S_p}{1-\mathbb{P}(T)} \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\text{VPN} = \frac{(1-p)S_p}{1-[p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)]}.}$$

(c) Le test est considéré comme intéressant si VPP $> p$. Montrer alors que : $S_e + S_p > 1$.

Supposons que VPP $> p$ et démontrons qu'alors $S_e + S_p > 1$.

Nous déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\text{VPP} &> p \\
\frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} &> p
\end{aligned}$$

Comme les nombres considérés sont tous positifs (ce sont des sommes de probabilités) :

$$\begin{aligned}
p \cdot S_e &> p\left[p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)\right] \\
S_e &> p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p) \\
S_e - p \cdot S_e &> (1-p)(1-S_p) \\
(1-p)S_e &> (1-p)(1-S_p) \\
S_e &> 1 - S_p \\
S_e + S_p &> 1
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que

si VPP > 1, alors $S - e + S_p > 1$.

4. La prévalence p du paludisme est de 90 % en Tanzanie et de $0,001$ en France. Le test biologique utilisé a pour sensibilité $S_e = 0,9$ et pour spécificité $S_p = 0,8$. Cela est valable pour toute la question 4.

   (a) Calculer la VPP en Tanzanie arrondie à 10^{-2} près.

   D'après la question 3.(b)

$$\begin{aligned}
\text{VPP}_{Tanzanie} &= \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} \\
&= \frac{0,9 \times 0,9}{0,9 \times 0,9 + (1-0,9)(1-0,8)} \\
&= \frac{0,81}{0,81 + 0,1 \times 0,2} \\
&= \frac{0,81}{0,83} \\
&= \frac{81}{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
81 & 83 \\ \cline{2-2}
-\ \ 0 & 0,975 \\ \cline{1-1}
810 & \\
-747 & \\ \cline{1-1}
630 & \\
-581 & \\ \cline{1-1}
490 & \\
-415 & \\ \cline{1-1}
75 &
\end{array}$$

Donc :

$$\boxed{\text{VPP} \approx 0,97 \text{ en arrondissant au centième.}}$$

On admet que $\text{VPP}_{France} = 0$; $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0,47$; $\text{VPN}_{France} = 1$.

(b) En déduire ce que l'on peut dire en terme de probabilité à un patient de Tanzanie et à un patient français selon que le test est positif ou négatif.

* En Tanzanie.
- Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{Tanzanie} \approx 0,97$ est très élevée, alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement malade.
- Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{Tanzanie} = 0,47$ est plutôt faible, alors il faut dire au patient que nous n'avons pas pu vérifier s'il est malade (ce qui ne signifie pas qu'il ne l'est pas).

* En France.
- Si le test est positif et puisque $\text{VPP}_{France} = 0$ alors il faut dire au malade qu'il est vraisemblablement victime d'un faux positif.
- Si le test est négatif et puisque $\text{VPN}_{France} = 0,47$, alors il faut dire au patient qu'il n'est pas malade.

(c) On considère la fonction v définie par $v(p) = P_T(M)$.

i. Donner l'expression de $v(p)$ en fonction de p.

Déterminons l'expression de v en fonction de p.

D'après la question 3.(b)

$$\begin{aligned}
v(p) &= \mathbb{P}_T(M) \\
&= \text{VPP} \\
&= \frac{p \cdot S_e}{p \cdot S_e + (1-p)(1-S_p)} \\
&= \frac{0,9p}{0,9p + (1-p)(1-0,8)} \\
&= \frac{0,9p}{0,9p + 0,2 - 0,2p} \\
&= \frac{0,9p}{0,7p + 0,2}
\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{v(p) = \frac{9p}{7p+2} \text{ quelque soit } p \in]0;1[.}$$

ii. Donner le sens de variation de la fonction v.

Étudions le variations de v sur $]0;1[$.

Si nous notons $f(x) = 9x$ et $g(x) = 7x + 2$, alors nous pouvons écrire v comme un quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $]0;1[$: $v = \frac{f}{g}$.
Par conséquent v est dérivables sur $]0;1[$ et

$$v' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ainsi pour tout x réel :

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{9 \times (7x+2) - 9x \times 7}{(7x+2)^2} \\
&= \frac{18}{(7x+2)^2}
\end{aligned}$$

Par conséquent $v' > 0$ sur $]0;1[$ et

$$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur }]0;1[.}$$

iii. Lorsque p est supérieur à $0,8$, en quoi la positivité du test est-elle un élément important du diagnostique ?

Si $p \geqslant 0,8$ alors, puisque v est strictement croissante sur $]0;1[$

$$v(p) \geqslant v(0,8).$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} v(p) &\geqslant \frac{9 \times 0,8}{7 \times 0,8 + 2} \\ &\geqslant \frac{7,2}{7,6} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 76 \\ \hline -\ \ 0 & 0,947 \\ \hline 720 & \\ -684 & \\ \hline 360 & \\ -304 & \\ \hline 560 & \\ -532 & \\ \hline 28 & \end{array}$$

Et donc $v(p) \geqslant 0,94$.

Si $p \geqslant 0,8$, alors la positivité indique avec ne forte probabilité que la personne est effectivement malade.