ESA 2017.

Exercice 1. 8 points

QCM 1.

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \mathrm{e}^{-\ln 2} - \ln(2) + 1 \\ &= \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \ln(2) + 1 \\ &= \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \ln(2) \end{aligned}$$

Réponse : C.

QCM 2.

Nous pourrions résoudre la question en usant d'arguments de convexité pour établir que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

Étudions les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Or

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

et

$$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Nous en déduisons que $\mathrm{e}^x - x \leqslant 1$ si et seulement si $x = 0$.

Réponse : B.

QCM 3.

La méthode la plus simple consiste à dériver les fonctions F proposées jusqu'à obtenir f. Nous allons procéder différemment, en usant d'un outil actuellement hors programme : l'intégration par parties.

Soient a et x des réels.

Calculons $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

f est dérivable et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc procéder à une intégration par parties.

Notons $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
Alors : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^x u(t) \cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [u(t) \cdot v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[t\mathrm{e}^{t}\right]_a^x - \int_a^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} + a\mathrm{e}^{-a} - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_a^x \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} - a\mathrm{e}^{-a} - \left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-a}\right) \\
&= -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - (a+1)\mathrm{e}^{-a}
\end{aligned}$$

En particulier pour $a = -1$ nous obtenons que $x \mapsto -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.

Réponse : B.

QCM 4.

Exprimons différemment A.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}-\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{5x}}
\end{aligned}$$

Réponse : C.

QCM 5.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{\sqrt{x+6}^2-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3},$$

donc

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \frac{1}{6}.$$

Réponse : D.

QCM 6.

Étudions le signe de f.

Nous connaissons le signe des fonctions $x \mapsto x-3$ et $x \mapsto \ln x$ donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons la réponse par lecture du tableau.

Réponse : D.

QCM 7.

Calculons la dérivée de f.

f est un produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$: $f = uv$ avec $u(x) = x-3$ et $v(x) = \ln(2x)$. Donc : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

$$f' = u'v + uv'$$

Donc, pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(2x) + (x-3) \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(2x) + \frac{x-3}{x} \end{aligned}$$

Réponse : B.

QCM 8.

La méthode la plus simple consiste à dériver les fonctions F proposées jusqu'à obtenir f. Nous allons procéder différemment en exhibant une dérivée.

Soient a et x deux réels de $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Calculons $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

f est continue donc intégrable par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^x \frac{1}{(-2t+5)^4}\ \mathrm{d}t\\ &= \int_a^x \frac{1}{-2}\cdot\frac{-2}{(-2t+5)^4}\ \mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{(-2t+5)^3}\right]_a^x\\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(-2x+5)^3}-\frac{1}{(-2a+5)^3}\right]\end{aligned}$$

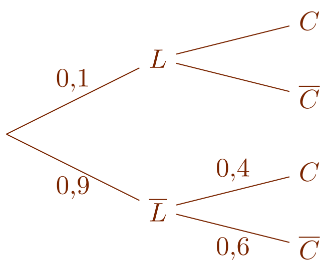
En particulier $x \mapsto \frac{1}{6}\frac{1}{(-2x+5)^3}$ est une primitive de f.

Réponse : C.

Exercice 2. 5 points

QCM 9.

Notons L : « l'élève a lu » et C : « l'élève est allé au cinéma ».
La situation peut être représentée par l'arbre suivant :



$\{L; \overline{L}\}$ est un système complet d'évènements donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap L) + \mathbb{P}(C \cap \overline{L})$$

Donc :

$$0{,}38 = \mathbb{P}(L) \cdot \mathbb{P}(C|L) + \mathbb{P}(\overline{L}) \cdot \mathbb{P}(C|\overline{L})$$
$$0{,}38 = 0{,}1\mathbb{P}(C|L) + 0{,}9 \times 0{,}4$$

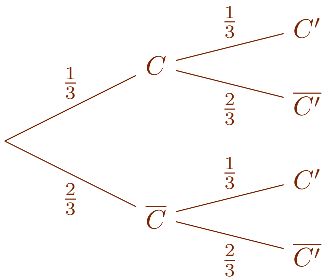
D'où :

$$\mathbb{P}(C|L) = 0{,}2$$

Réponse : B.

QCM 10.

Qu'il réussisse au moins un concours est un événement qui peut être noté $C \cup C'$.
C et C' étant indépendants l'expérience peut être représentée par l'arbre :



Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cup C') &= 1 - \mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{C'}) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Réponse : D.

QCM 11.

Le programme impose de savoir par cœur que, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68\\
&\mathbb{P}(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95\\
&\mathbb{P}(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997
\end{aligned}$$

* $\mathbb{P}(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) \approx 0{,}95$.

  Soit $\lambda \in [\![1;3]\!]$.
  Si

$$\mathbb{P}(\mu-\lambda\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\lambda\sigma) = \eta$$

alors, en consédérant les contraires :

$$\mathbb{P}\left[(\mu-\lambda\sigma > X) \text{ ou } (X > \mu+\lambda\sigma)\right] = 1-\eta$$

La loi normale étant continue :

$$\mathbb{P}\left[(\mu-\lambda\sigma \geqslant X) \text{ ou } (X \geqslant \mu+\lambda\sigma)\right] = 1-\eta$$

Par symétrie par rapport à la droite $x=\mu$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu-\lambda\sigma) = \frac{1-\eta}{2}$$

* $\mathbb{P}(X \geqslant 3\sigma) \approx \frac{1-0{,}997}{2} \approx 0{,}0015$.
* $\mathbb{P}(X \leqslant -\sigma) \approx \frac{1-0{,}68}{2} \approx 0{,}16$.
* $\mathbb{P}(X \geqslant 2\sigma) \approx \frac{1-0{,}95}{2} \approx 0{,}025$.

QCM 12.

Déterminons le lieu géométrique, $\mathscr{L}$, des points M.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
AM &= |z-z_A|\\
&= |z-i|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} BM &= |z - z_B| \\ &= |z+1| \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathscr{L}$ est l'ensemble des points équidistants de A et B. Autrement dit $\mathscr{L}$ est la médiatrice de $[AB]$.

Nous vérifions aisément que : $|0-i| = |0+1|$ donc $O \in \mathscr{L}$.

Réponse : C.

QCM 13.

Résolvons l'équation.

Notons $y = \sin x$ et (E_1) l'équation proposée par l'énoncé.
x est solution si et seulement si y vérifie

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad (E_2).$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc (E_2) admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi x est solution de (E_1) si et seulement si

$$\sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) : $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Réponse : C.

Exercice 3. 7 points

Partie A.

1. Interprétons géométriquement $\mathbb{P}(T \leqslant 1)$.

   Puisque $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est positive,

   $P(T \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$ représente l'aire située entre l'axe des abscisses, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. $f(0) = \lambda$ or f est la dérivée de $t \mapsto \mathbb{P}(T \leqslant t)$ donc

   λ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

Partie B.

1. Calculons λ.

$$0{,}92 = \mathbb{P}(T \leqslant 1)$$

   équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 0{,}92 &= \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ 0{,}92 &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^1 \\ 0{,}92 &= -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 \\ 0{,}08 &= \mathrm{e}^{-\lambda} \\ -\ln(0{,}08) &= \lambda \end{aligned}$$

$$\lambda = -\ln(0{,}08).$$

2. Calculons $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) &= \int_1^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_1^2 \\
&= -\mathrm{e}^{-2\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda} &= \mathrm{e}^{\ln(0{,}08)} \\
&= 0{,}08
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) &= 0{,}08(1 - 0{,}08) \\
&= 0{,}0736
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) \approx 0{,}07.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(T > 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 2) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{T > 2}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T \leqslant 2) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(T < 1) + \mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)] \\
&= 1 - [\mathbb{P}(T \leqslant 1) + \mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)] \\
&\approx 1 - 0{,}92 - 0{,}07 \\
&\approx 0{,}01
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T > 2) \approx 0{,}01.}$$

Partie C.

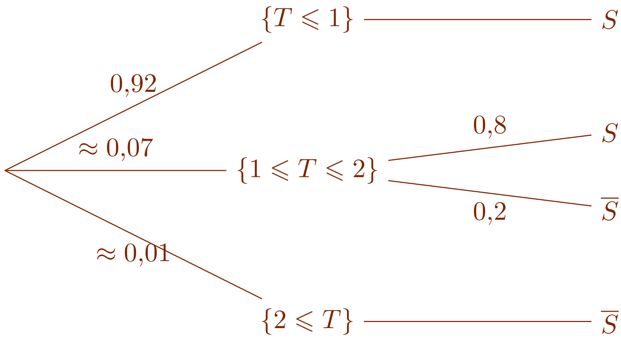
1. (a) Notons S : « la personne indique que l'attente est satisfaisante ».

Calculons $\mathbb{P}(S)$.

La famille d'événements $\{\ \{T \leqslant 1\};\ \{1 \leqslant T \leqslant 1\};\ \{2 \leqslant T\}\ \}$ est un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap \{T \leqslant 1\}) + \mathbb{P}(S \cap \{1 \leqslant T \leqslant 2\}) + \mathbb{P}(S \cap \{2 \leqslant T\}).$$

Représentons la situation par un arbre pondéré.



Donc

$$\mathbb{P}(S) \approx 0{,}92 + 0{,}07 \times 0{,}8 + 0.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S) \approx 0{,}97.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1 < T < 2\}|S) &= \mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\{1 \leqslant T \leqslant 2\} \cap S\right)}{\mathbb{P}(S)} \\
&\approx \frac{0{,}07 \times 0{,}8}{0{,}97} \\
&\approx \frac{56}{97}
\end{aligned}$$

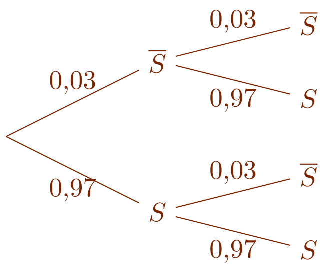
$$
\begin{array}{r|l}
5\;6 & 9\;7 \\ \cline{2-2}
-\;\;0 & 0.5\;7 \\ \cline{1-1}
5\;6\;0 & \\
-\;4\;8\;5 & \\ \cline{1-1}
7\;5\;0 & \\
-\;6\;7\;9 & \\ \cline{1-1}
7\;1 &
\end{array}
$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S) \approx 0{,}57.}$$

2. Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de patient insatisfaits parmi les deux interrogés.

   Calculons $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

   Nous admettrons que le nombre de questionnaires est suffisamment nombreux pour que l'on puisse considérer deux tirages comme indépendants.
   Clairement $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2; 0{,}97)$.



$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 2 \times 0{,}03 \times 0{,}97 + 0{,}03 \times 0{,}03 \\
&\approx 0{,}0927
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 1) \approx 0{,}09.}$$