ESA 2017.

Concours 2017 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices 1 et 2 (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. 8 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point, toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *points. Si le total est négatif, le note est ramenée à* 0.

QCM 1.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x + 1$.
L'image de $\ln 2$ par la fonction f est :

A. $\dfrac{1}{2} - \ln 3$,

B. $-1 - \ln 2$,

C. $\dfrac{3}{2} - \ln 2$,

D. $3 - \ln 2$.

Calculons $f(\ln 2)$.

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \mathrm{e}^{-\ln 2} - \ln(2) + 1 \\ &= \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - \ln(2) + 1 \\ &= \frac{1}{2} - \ln(2) + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \ln(2) \end{aligned}$$

Réponse : C.

QCM 2.

Sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^x - x \leqslant 1$ admet pour ensemble de solutions :

A. $\emptyset$,

B. $\{0\}$,

C. $[0; +\infty[$,

D. $\mathbb{R}$.

Nous pourrions résoudre la question en usant d'arguments de convexité pour établir que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

Étudions les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Or

$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

et

$$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Nous en déduisons que $e^x - x \leqslant 1$ si et seulement si $x = 0$.

Réponse : B.

QCM 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$,

B. $F(x) = -(1 + x)e^{-x}$,

C. $F(x) = -xe^{-x}$,

D. $F(x) = (1 - x)e^{-x}$.

La méthode la plus simple consiste à dériver les fonctions F proposées jusqu'à obtenir f. Nous allons procéder différemment, en usant d'un outil actuellement hors programme : l'intégration par parties.

Soient a et x des réels.

Calculons $\int_a^x f(t)\,dt$.

f est dérivable et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc procéder à une intégration par parties.

Notons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$.

Alors : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^x u(t)\cdot v'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= [u(t)\cdot v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[t\mathrm{e}^{t}\right]_a^x - \int_a^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} + a\mathrm{e}^{-a} - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_a^x \\
&= -x\mathrm{e}^{-x} - a\mathrm{e}^{-a} - \left(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-a}\right) \\
&= -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - (a+1)\mathrm{e}^{-a}
\end{aligned}$$

En particulier pour $a = -1$ nous obtenons que $x \mapsto -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.

Réponse : B.

QCM 4.

Pour tout réel x, l'expression $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}}$ est égale à :

A. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{3x}}$,

B. $\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-2x}+1)$,

C. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{5x}}$,

D. $\mathrm{e}^{-5x} - \mathrm{e}^{-3x}$.

Exprimons différemment A.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-3x}-\mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{2x}} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{5x}}
\end{aligned}$$

Réponse : C.

QCM 5.

La limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ est égale à :

A. 0,

B. $+\infty$,

C. 1,

D. $\dfrac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{\sqrt{x+6}^{2}-3^{2}}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3},$$

donc

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \frac{1}{6}.$$

Réponse : D.

QCM 6.

La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln x$ est :

A. positive sur $]0;+\infty[$,

B. négative sur $]0;+\infty[$,

C. négative sur $]0;1]$,

D. positive sur $[3;+\infty[$.

Étudions le signe de f.

Nous connaissons le signe des fonctions $x \mapsto x-3$ et $x \mapsto \ln x$ donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons la réponse par lecture du tableau.

Réponse : D.

QCM 7.

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(2x)$.
Sa fonction dérivée est définie sur $]0;+\infty[$ par :

A. $\ln(2x) - \dfrac{x-3}{2x}$,

B. $\ln(2x) + \dfrac{x-3}{x}$,

C. $\dfrac{1}{x}$,

D. $\dfrac{1}{2x}$.

Calculons la dérivée de f.

f est un produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$: $f = uv$ avec $u(x) = x-3$ et $v(x) = \ln(2x)$. Donc : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

$$f' = u'v + uv'$$

Donc, pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(2x) + (x-3) \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(2x) + \frac{x-3}{x} \end{aligned}$$

Réponse : B.

QCM 8.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = (-2x+5)^{-4}$.

Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ est la fonction F définie sur cet intervalle par :

A. $F(x) = \dfrac{1}{5}(-2x+5)^{-5}$,

B. $F(x) = \dfrac{1}{10}(-2x+5)^{-5}$,

C. $F(x) = \dfrac{1}{6}(-2x+5)^{-3}$,

D. $F(x) = -\dfrac{1}{3}(-2x+5)^{-3}$.

La méthode la plus simple consiste à dériver les fonctions F proposées jusqu'à obtenir f. Nous allons procéder différemment en exhibant une dérivée.

Soient a et x deux réels de $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

Calculons $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

f est continue donc intégrable par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^x \frac{1}{(-2t+5)^4}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^x \frac{1}{-2}\cdot\frac{-2}{(-2t+5)^4}\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{(-2t+5)^3}\right]_a^x \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(-2x+5)^3}-\frac{1}{(-2a+5)^3}\right]\end{aligned}$$

En particulier $x \mapsto \frac{1}{6}\frac{1}{(-2x+5)^3}$ est une primitive de f.

Réponse : C.

Exercice 2. 5 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point, toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *points. Si le total est négatif, le note est ramenée à* 0.

QCM 9.

La documentaliste d'un collège a reçu une offre pour acheter les romans de la saga HP.

Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves et relève que :

- 10 % des élèves ont lu le 7ème épisode,
- 38 % des élèves ont vu le 7ème épisode au cinéma,
- 40 % de ceux qui ne l'ont pas lu, ont vu le 7ème épisode au cinéma.

La documentaliste prend une réponse au hasard parmi celles des élèves interrogés.

La probabilité que l'élève soit aller voir le 7ème épisode au cinéma sachant qu'il l'a lu est :

A. 0,3,

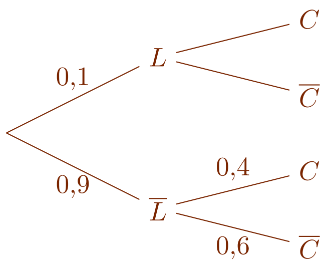
B. 0,2,

C. 0,038,

D. 0,04.

Notons L : « l'élève a lu » et C : « l'élève est allé au cinéma ».

La situation peut être représentée par l'arbre suivant :



$\{L; \overline{L}\}$ est un système complet d'évènements donc

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap L) + \mathbb{P}(C \cap \overline{L})$$

Donc :

$$0{,}38 = \mathbb{P}(L) \cdot \mathbb{P}(C|L) + \mathbb{P}(\overline{L}) \cdot \mathbb{P}(C|\overline{L})$$
$$0{,}38 = 0{,}1\mathbb{P}(C|L) + 0{,}9 \times 0{,}4$$

D'où :

$$\mathbb{P}(C|L) = 0{,}2$$

Réponse : B.

QCM 10.

Un élève se présente à deux concours C et C' qui sont indépendants.

Il a une chance sur trois de réussir le concours C et une chance sur trois de réussir le concours C'.

En pensant augmenter ses chances de réussite, l'élève décide de passer les deux concours.

La probabilité qu'il réussisse au moins un concours est :

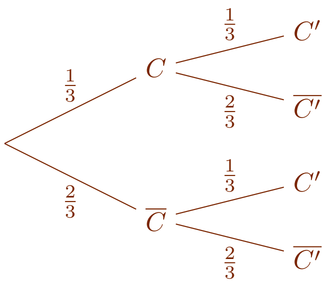
A. $\dfrac{2}{3}$,

B. $\dfrac{1}{9}$,

C. $\dfrac{4}{9}$,

D. $\dfrac{5}{9}$,

Qu'il réussisse au moins un concours est un événement qui peut être noté $C \cup C'$.
C et C' étant indépendants l'expérience peut être représentée par l'arbre :



Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cup C') &= 1 - \mathbb{P}(\overline{C} \cap \overline{C'}) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Réponse : D.

QCM 11.

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$. Alors on a :

A. $P(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) \approx 0{,}99$,

B. $P(X \geqslant 3\sigma) \approx 0{,}005$,

C. $P(X \leqslant -\sigma) \approx 0{,}6$,

D. $P(X \geqslant 2\sigma) \approx 0{,}0025$.

Le programme impose de savoir par cœur que, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$$
$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$$
$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$$

* $\mathbb{P}(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) \approx 0{,}95$.

Soit $\lambda \in [\![1;3]\!]$.
Si

$$\mathbb{P}(\mu - \lambda\sigma \leqslant X \leqslant \mu + \lambda\sigma) = \eta$$

alors, en consédérant les contraires :

$$\mathbb{P}\left[(\mu - \lambda\sigma > X) \text{ ou } (X > \mu + \lambda\sigma)\right] = 1 - \eta$$

La loi normale étant continue :

$$\mathbb{P}\left[(\mu - \lambda\sigma \geqslant X) \text{ ou } (X \geqslant \mu + \lambda\sigma)\right] = 1 - \eta$$

Par symétrie par rapport à la droite $x = \mu$:

$$\mathbb{P}(X \geqslant \mu - \lambda\sigma) = \frac{1-\eta}{2}$$

* $\mathbb{P}(X \geqslant 3\sigma) \approx \frac{1-0{,}997}{2} \approx 0{,}0015$.
* $\mathbb{P}(X \leqslant -\sigma) \approx \frac{1-0{,}68}{2} \approx 0{,}16$.
* $\mathbb{P}(X \geqslant 2\sigma) \approx \frac{1-0{,}95}{2} \approx 0{,}025$.

QCM 12.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé directe d'origine O.
Les points A et B ont pour affixe respective i et -1.
L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

A. la droite (AB),

B. le cercle de diamètre $[AB]$,

C. la droite perpendiculaire à (AB) passant par O,

D. le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

Déterminons le lieu géométrique, $\mathscr{L}$, des points M.

Remarquons que

$$\begin{aligned} AM &= |z - z_A| \\ &= |z - i| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} BM &= |z - z_B| \\ &= |z + 1| \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathscr{L}$ est l'ensemble des points équidistants de A et B. Autrement dit $\mathscr{L}$ est la médiatrice de $[AB]$.
Nous vérifions aisément que : $|0 - i| = |0 + 1|$ donc $O \in \mathscr{L}$.

Réponse : C.

QCM 13.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$:

A. n'admet pas de solution,

B. admet deux solutions,

C. admet trois solutions,

D. admet une infinité de solutions.

Résolvons l'équation.

Notons $y = \sin x$ et (E_1) l'équation proposée par l'énoncé.
x est solution si et seulement si y vérifie

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad (E_2).$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) \\ &= 9\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc (E_2) admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi x est solution de (E_1) si et seulement si

$$\sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Nous en déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) : $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Réponse : C.

Exercice 3. 7 points

La durée d'attente, exprimée en heures, au service des urgences d'un hôpital peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On sait alors que pour tout réel t strictement positif : $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est la fonction de densité de la variable aléatoire T et l'on note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Partie A.

1. Interpréter graphiquement la probabilité $P(T \leqslant 1)$.

   Interprétons géométriquement $\mathbb{P}(T \leqslant 1)$.

   Puisque $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est positive,

   $\boxed{P(T \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \text{ représente l'aire située entre l'axe des abscisses, } \mathscr{C} \text{ et les droites d'équations } x = 0 \text{ et } x = 1.}$

2. Indiquer où peut être lu graphiquement le paramètre λ.

   $f(0) = \lambda$ or f est la dérivée de $t \mapsto \mathbb{P}(T \leqslant t)$ donc

   $\boxed{\lambda \text{ est l'ordonnée du point de } \mathscr{C} \text{ d'abscisse } 0.}$

Dans la suite de l'exercice on suppose que $P(T \leqslant 1) = 0{,}92$ *et l'on admet que* $\mathrm{e}^{-2{,}5} = 0{,}08$ *à* 10^{-2} *près.*

Partie B.

1. Déterminer la valeur exacte de λ. *Dans la suite de l'exercice on prendra* $\lambda = 2{,}5$.

   Calculons λ.

$$0{,}92 = \mathbb{P}(T \leqslant 1)$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
0{,}92 &= \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
0{,}92 &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^1 \\
0{,}92 &= -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 \\
0{,}08 &= \mathrm{e}^{-\lambda} \\
-\ln(0{,}08) &= \lambda
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = -\ln(0{,}08).}$$

2. Calculer $P(1 \leqslant T \leqslant 2)$ à 10^{-2} près.

   Calculons $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) &= \int_1^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_1^2 \\
&= -\mathrm{e}^{-2\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda} &= \mathrm{e}^{\ln(0{,}08)} \\
&= 0{,}08
\end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) &= 0{,}08(1 - 0{,}08) \\
&= 0{,}0736
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2) \approx 0{,}07.}$$

3. Calculer $P(T > 2)$ à 10^{-2} près.

   Calculons $\mathbb{P}(T > 2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 2) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{T > 2}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T \leqslant 2) \\
&= 1 - [\mathbb{P}(T < 1) + \mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)] \\
&= 1 - [\mathbb{P}(T \leqslant 1) + \mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)] \\
&\approx 1 - 0{,}92 - 0{,}07 \\
&\approx 0{,}01
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T > 2) \approx 0{,}01.}$$

Partie C.

Dans cet hôpital, un questionnaire est distribué aux patients :

- si la durée d'attente est inférieure ou égale à 1 heure, les patients cochent la case "attente satisfaisante" ;
- si la durée d'attente est comprise strictement entre 1 heure et 2 heures, alors 80 % des patients cochent la case "attente satisfaisante" et 20 % des patients cochent la case "attente non satisfaisante" ;
- si la durée d'attente est supérieure ou égale à 2 heures, les patients cochent la case "attente non satisfaisante".

1. On prélève de façon aléatoire un questionnaire.

   (a) Calculer la probabilité, à 10^{-2} près, de lire "attente satisfaisante".

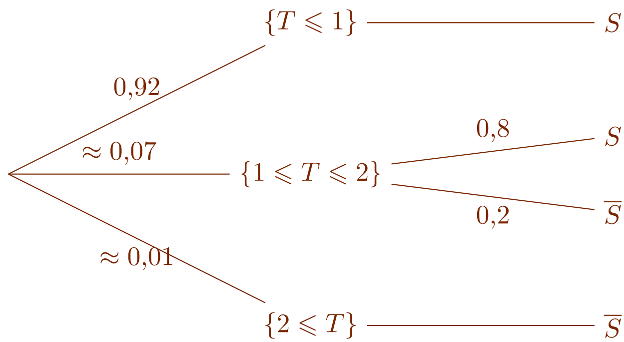
   Notons S : « la personne indique que l'attente est satisfaisante ».

   Calculons $\mathbb{P}(S)$.

   La famille d'événements $\{\ \{T \leqslant 1\};\ \{1 \leqslant T \leqslant 1\};\ \{2 \leqslant T\}\ \}$ est un système complet d'événements donc

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap \{T \leqslant 1\}) + \mathbb{P}(S \cap \{1 \leqslant T \leqslant 2\}) + \mathbb{P}(S \cap \{2 \leqslant T\}).$$

   Représentons la situation par un arbre pondéré.



   Donc

$$\mathbb{P}(S) \approx 0{,}92 + 0{,}07 \times 0{,}8 + 0.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S) \approx 0{,}97.}$$

(b) Sachant que la case cochée est "attente satisfaisante", calculer la probabilité, à 10^{-2} près, qu'elle provienne d'un patient ayant attendu entre 1 heure et 2 heures strictement.

Calculons $\mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1 < T < 2\}|S) &= \mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\} \cap S)}{\mathbb{P}(S)} \\
&\approx \frac{0{,}07 \times 0{,}8}{0{,}97} \\
&\approx \frac{56}{97}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & 5 & 6 & & & 9\;7 \\ \cline{6-6}
- & & 0 & & & 0.5\;7 \\ \cline{2-3}
 & 5 & 6 & 0 & & \\
- & 4 & 8 & 5 & & \\ \cline{2-4}
 & & 7 & 5 & 0 & \\
- & & 6 & 7 & 9 & \\ \cline{3-5}
 & & & 7 & 1 &
\end{array}$$

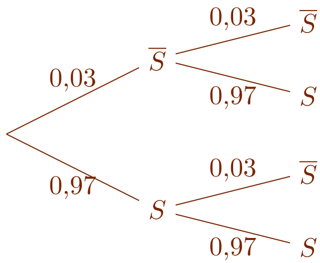
$$\boxed{\mathbb{P}(\{1 \leqslant T \leqslant 2\}|S) \approx 0{,}57.}$$

2. On prélève de façon aléatoire deux questionnaires.
Calculer la probabilité à 10^{-2} près, qu'au moins un patient ait coché la case "attente non satisfaisante".

Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de patient insatisfaits parmi les deux interrogés.

Calculons $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Nous admettrons que le nombre de questionnaires est suffisamment nombreux pour que l'on puisse considérer deux tirages comme indépendants.
Clairement $X \hookrightarrow \mathscr{B}(2; 0{,}97)$.



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 2 \times 0{,}03 \times 0{,}97 + 0{,}03 \times 0{,}03 \\ &\approx 0{,}0927\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 1) \approx 0{,}09.}$$