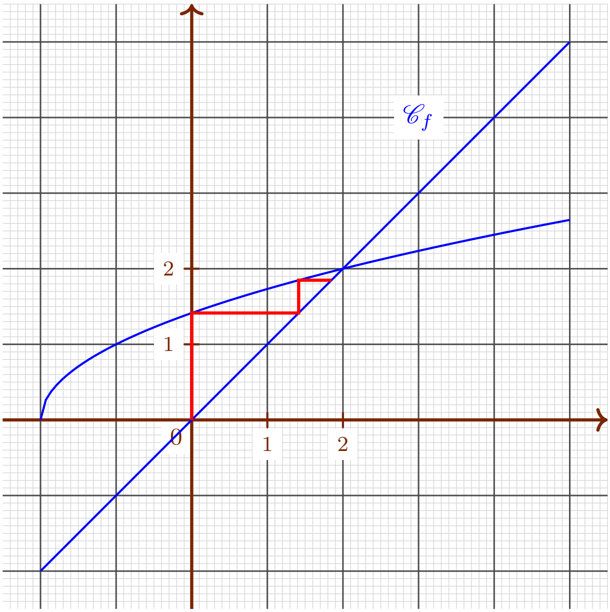
ESA 2016.

Exercice 1. (7 points)

QCM 1.

Pour conjecturer nous pouvons faire un schéma.

Notons $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Nous avons donc $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce ne peut être que vers l'un de ses points fixes.



La courbe représentative de la fonction f se déduit facilement de la courbe représentative de la fonction racine carrée par une translation de vecteur $-2\vec{i}$. Et la droite tracée est la première bissectrice.

Le graphique permet de rapidement conjecturer que la suite converge vers 2 en étant strictement croissante.

Réponse : D. La suite est majorée par 2.

QCM 2.

Le contre-exemple fourni par la suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'exclure les réponses A, B et D.

Démontrons néanmoins que la réponse C convient bien.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, il existe un rang N à partir duquel les termes de $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous non nuls.
Soit $n \geqslant N$ un entier naturel.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n}\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{u_n}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{u_n^2}}\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{u_n^2}} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{u_n}\right| = 0$.
Finalement

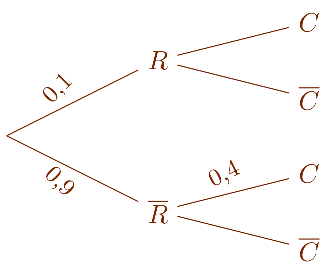
$$\boxed{\text{Réponse : C. } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.}$$

QCM 3.

Notons C l'événement « l'élève a vu le film au cinéma » et R l'événement « l'élève a lu le roman ».

Calculons $\mathbb{P}_R(C)$.

Nous pouvons schématiser la situation avec l'arbre probabiliste suivant :



Et nous savons également que $\mathbb{P}(C) = 0{,}38$.

Nous sommes tenté d'utiliser la définition de la probabilité conditionnelle mais il nous manque $\mathbb{P}(R \cap C)$. Commençons donc par calculer cette dernière probabilité.

Puisque $\{R, \overline{R}\}$ constitue un système complet d'événements nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap R) + \mathbb{P}(C \cap \overline{R})$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cap R) &= \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C \cap \overline{R}) \\ &= 0{,}38 - \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(C) \\ &= 0{,}38 - 0{,}9 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}02\end{aligned}$$

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_R(C) &= \frac{\mathbb{P}(R \cap C)}{\mathbb{P}(R)} \\ &= \frac{0{,}02}{0{,}1}\end{aligned}$$

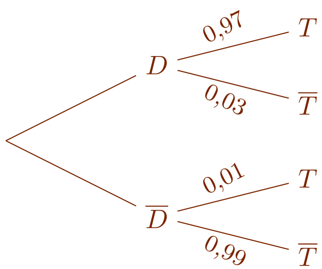
Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}_R(C) = 0{,}2.}$$

QCM 4.

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

Nous pouvons schématiser la situation avec l'arbre probabiliste suivant :



Et nous savons que $\mathbb{P}(T) = 0{,}05$.

Puisque $\{D,\overline{D}\}$ constitue un système complet d'événements nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap D) + \mathbb{P}(T \cap \overline{D})$$

En utilisant la définition des probabilités conditionnelles (ou la formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(T) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(T) \\
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(T) + \left[1 - \mathbb{P}(D)\right]\mathbb{P}_{\overline{D}}(T) \\
0{,}05 &= \mathbb{P}(D) \times 0{,}97 + \left[1 - \mathbb{P}(D)\right] 0{,}01
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
0{,}05 - 0{,}01 &= (0{,}97 - 0{,}01)\mathbb{P}(D) \\
\frac{1}{24} &= \mathbb{P}(D)
\end{aligned}$$

Finalement

Réponse : D. $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{24}$.

QCM 5.

Résolvons l'équation proposée en procédant par analyse et synthèse.

* Analyse.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Supposons que

$$\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14$$

On en déduit :

$$\ln\left[(x+3)(x-2)\right] = \ln 14$$

Et puisque ln est une bijection :

$$(x+3)(x-2) = 14$$

En développant :

$$x^2 + x - 20 = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux que nous allons résoudre.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) \\ &= 81\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \times 1} \\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \times 1} \\ &= 4\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} = \{4; -5\}$.

* Synthèse.

Des solutions précédemment obtenues une seule convient, 4, puisque ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : C. $\{4\}$.

QCM 6.

Exprimons $\mathrm{e}^{-3\ln x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-3\ln x} &= \mathrm{e}^{\ln\left(x^{-3}\right)} \\ &= \exp \circ \ln\left(x^{-3}\right) \\ &= x^{-3} \\ &= \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

Réponse : B.

QCM 7.

résolvons l'inéquation par analyse-synthèse.

* Analyse.
Procédons à un changement de variable pour simplifier l'inéquation.
Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $X = e^x$.
X ne peut prendre que des valeurs strictement positives, mais nous y reviendrons dans la phase de synthèse.
Notre inéquation s'écrit maintenant : $(X - 3)(X + 1) \geqslant 0$.
En utilisant un tableau de signe :

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$X - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$X + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(X-3)(X+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi nécessairement : $X \geqslant 3$. Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} e^x &\geqslant 3 \\ \ln(e^x) &\geqslant \ln 3, \quad \text{car ln est strictement coirssante.} \\ x &\geqslant \ln 3 \end{aligned}$$

* Synthèse.
Si $x \in [\ln 3; +\infty[$, alors $e^x \geqslant 3$ et donc x est bien solution de l'inéquation.

Réponse : C. $[\ln 3, +\infty[$.

Exercice 2. (7 points)

QCM 8.

Calculons I.

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1 \end{aligned}$$

Réponse D. $I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1$.

QCM 9.

Déterminons l'écriture algébrique de z.

En utilisant les quantités conjuguées :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1^2 + 2i + i^2}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

Réponse : C. Un argument de z est $\frac{pi}{2}$.

QCM 10.

Déterminons la dérivée de f.

$f = uv$ avec, pour tout x réel, $u(x) = 4x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{x}$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' = u'v + uv'$$

Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} + 4x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (4-4x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Réponse : D. $f'(x) = (4-4x)\mathrm{e}^{-x}$ quelque soit x réel.

QCM 11.

Déterminons la densité f par conditions nécessaire et suffisante.

* Analyse.
  Puisque f est une densité de probabilité sur $[-4{,}2]$, nécessairement

$$\int_{-4}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

  Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{2} a|t|\ \mathrm{d}t &= 1 \\ \int_{-4}^{0} a(-t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{2} at\ \mathrm{d}t &= 1 \\ \left[-\frac{a}{2}t^2\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{2} &= 1 \\ 8a + 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

* Synthèse.
  Il est clair, en reprenant les précédents calculs, que si $a = 0{,}1$, f, qui est une fonction continue sur $[-4{,}2]$, est bien une densité de probabilité.

Réponse D. $a = 0{,}1$.

QCM 12.

Déterminons λ.

Par définition de la loi exponentielle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 1) &= \int_0^1 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$-\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 = 0{,}18$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\lambda} &= 0{,}82 \\ \ln \circ \exp(-\lambda) &= \ln(0{,}82) \\ -\lambda &= \ln(0{,}82)\end{aligned}$$

Réponse : C. $\lambda = -\ln(0{,}82)$.

QCM 13.

X est centrée donc $\mathbb{P}(-1 < X < 1) = 2\mathbb{P}(0 \leqslant X < 1)$.
De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 \leqslant X < 1) &= \mathbb{P}\left(X \in [0, +\infty[\setminus [1, +\infty[\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \in [0, +\infty[\right) - \mathbb{P}\left(X \in [1, +\infty[\right) \\ &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X > 1)\end{aligned}$$

Ainsi

Réponse : A. $\mathbb{P}(-1 < X < 1) = 1 - 2\mathbb{P}(X > 1)$.

QCM 14.

Exercice 3. (6 points)

1. calculons $C(0)$.

$$\begin{aligned} C(0) &= 3\left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-2\times 0}\right) \\ &= 3(1-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{C(0) = 0.}$$

2. Déterminons $\lim_{t\to+\infty} C(t)$.

   Il y a une forme indéterminée pour lever l'indétermination factorisons par e^{-t}.

   Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} C(t) &= 3\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{t}\right) \\ &= 3\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) \end{aligned}$$

   Puisque $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous en déduisons $1 - \mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Enfin : $\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$. La concentration du médicament tend vers 0, autrement dit le médicament disparaît peu à peu du sang.

3. Calculons C'.

   C est une somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} C'(t) &= 3\left(-\mathrm{e}^{-t} - (-2)\mathrm{e}^{-2t}\right) \\ &= -3\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-t}\right) \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $C'(x) = -3\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-t}\right)$.

4. Dressons le tableau de signe de C'.

   $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ quelque soit $t \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $f \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} 1 - 2\mathrm{e}^{-t} > 0 &\Leftrightarrow 1 > 2\mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

   Et puisque $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante :

$$\begin{aligned} 1 - 2\mathrm{e}^{-t} > 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) > -t \\ &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1}{2}\right) < t \\ &\Leftrightarrow \ln 2 < t \end{aligned}$$

   Nous en déduisons le tableau de signe et de variation suivant.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$-3\mathrm{e}^{-t}$		$-$		$-$	
$1-2\mathrm{e}^{-t}$		$-$	0	$+$	
$C'(t)$		$-$	0	$+$	
C	0	$\nearrow$	$C(\ln 2)$	$\searrow$	0

   Et

$$\begin{aligned} C(\ln 2) &= 3\left(\mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2}\right) \\ &= 3\left(\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5. D'après la question précédente :

$$\boxed{\text{La concentration maximale est de 0,75 g/L.}}$$

6. Résolvons l'équation $C(t) = \frac{2}{3}$ dans $\mathbb{R}_+$.

En procédant au changement de variable $X = -t$ l'équation peut s'écrire :

$$3\left(X - X^2\right) = \frac{2}{3}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} X - X^2 &= \frac{2}{9} \\ -X^2 + X - \frac{2}{9} &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation polynomiale de degré deux.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation polynomiale de degré deux admet deux racines distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi nécessairement :

$$\begin{aligned} e^{-t} = \frac{2}{3} \quad &\text{ou} \quad e^{-t} = \frac{1}{3} \\ -t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad &\text{ou} \quad -t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ t = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad &\text{ou} \quad t = \ln 3 \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\ln 3$ sont effectivement des solutions de l'équation $C(t) = \frac{2}{3}$.

$C(t) = \frac{2}{3}$ si et seulement si $t \in \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln 3\right\}$.

7. D'après la question précédente et le tableau de variation de C, nous pouvons affirmer que

la concentration en médicament est supérieure à $\frac{2}{3}$ si et seulement si $t \in \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln 3\right]$.