ESA 2016.

Épreuves d'admissibilité du concours 2016 d'admission à l'école de santé des armées .

Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Mercredi 13 avril 2016.

Épreuve de mathématiques.

Durée : 1 heure 30 minutes

Coefficient 3.

Avertissements :

- L'utilisation de calculatrices, règles à calculs, formulaires, papier millimétré, téléphones portables est interdite.
- Vérifiez que ce fascicule comporte 6 pages numérotées de 1 à 6, page de garde comprise.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- Toutes les réponses aux questions sous forme de QCM doivent être faites sur la grille de réponse jointe. Si le candidat répond aux questions QCM sur sa feuille et non sur la grille, ses réponses ne seront pas prises en compte par le correcteur.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

Exercice 1. (7 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 1.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

A. La suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

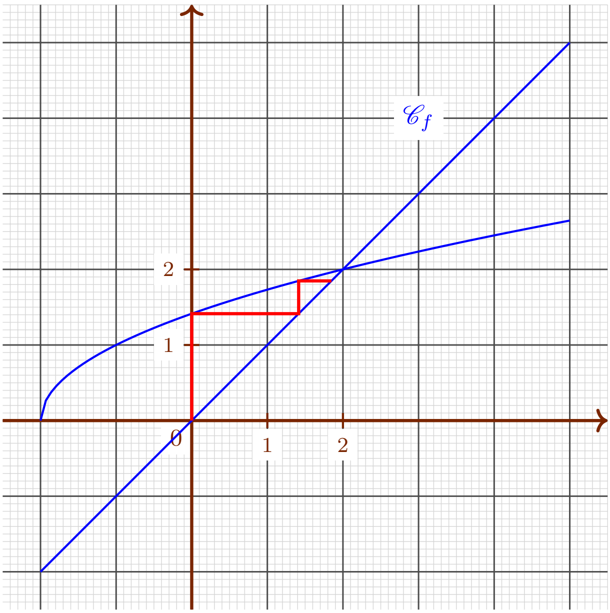
B. La suite (u_n) est majorée par 1,5.

C. La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

D. La suite (u_n) est majorée par 2.

Pour conjecturer nous pouvons faire un schéma.

Notons $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Nous avons donc $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce ne peut être que vers l'un de ses points fixes.



La courbe représentative de la fonction f se déduit facilement de la courbe représentative de la fonction racine carrée par une translation de vecteur $-2\vec{i}$. Et la droite tracée est la première bissectrice.

Le graphique permet de rapidement conjecturer que la suite converge vers 2 en étant strictement croissante.

Réponse : D. La suite est majorée par 2.

QCM 2.

Soit la suite (u_n) pour laquelle on suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$.

A. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

B. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

C. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

D. $\lim_{n\to+\infty} u_n^3 = +\infty$.

Le contre-exemple fourni par la suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'exclure les réponses A, B et D.

Démontrons néanmoins que la réponse C convient bien.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, il existe un rang N à partir duquel les termes de $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous non nuls.
Soit $n \geqslant N$ un entier naturel.

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{u_n}\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{u_n}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{u_n^2}} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{u_n^2}} = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{u_n}\right| = 0$.
Finalement

Réponse : C. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

QCM 3.

La documentaliste d'un collège a reçu une offre pour acheter les romans de la saga HP.

Elle enquête pour savoir si le sujet intéresse les élèves : 10 % des élèves ont lu le $7^{\text{ème}}$ épisode, 38 % des élèves ont vu le $7^{\text{ème}}$ épisode au cinéma et 40 % de ceux qui ne l'ont pas lu, ont vu le $7^{\text{ème}}$ épisode au cinéma.

La documentaliste tire au hasard une réponse d'un des élèves interrogés.

Quelle est la probabilité que l'élève soit allé voir le $7^{\text{ème}}$ épisode au cinéma sachant qu'il a lu le roman ?

A. 0,3.

B. 0,2.

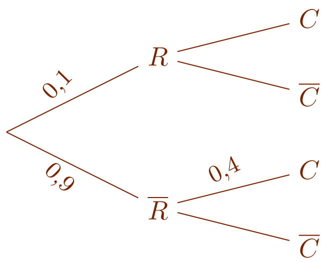
C. 0,038.

D. 0,04.

Notons C l'événement « l'élève a vu le film au cinéma » et R l'événement « l'élève a lu le roman ».

Calculons $\mathbb{P}_R(C)$.

Nous pouvons schématiser la situation avec l'arbre probabiliste suivant :



Et nous savons également que $\mathbb{P}(C) = 0{,}38$.

Nous sommes tenté d'utiliser la définition de la probabilité conditionnelle mais il nous manque $\mathbb{P}(R \cap C)$. Commençons donc par calculer cette dernière probabilité.

Puisque $\{R, \overline{R}\}$ constitue un système complet d'événements nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap R) + \mathbb{P}(C \cap \overline{R})$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cap R) &= \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C \cap \overline{R}) \\ &= 0{,}38 - \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(C) \\ &= 0{,}38 - 0{,}9 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}02\end{aligned}$$

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_R(C) = \frac{\mathbb{P}(R \cap C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0{,}02}{0{,}1}$$

Finalement

$$\boxed{\mathbb{P}_R(C) = 0{,}2.}$$

QCM 4.

Un groupe de coureurs participe à une course cycliste et ils subissent de façon aléatoire un contrôle antidopage.

On appelle T l'événement « le contrôle est positif » et on admet que $p(T) = 0{,}05$.
On appelle D l'événement « le coureur est dopé ».
Le contrôle antidopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

1. si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
2. si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

la probabilité que le coureur soit dopé est :

A. $\dfrac{95}{100}$.

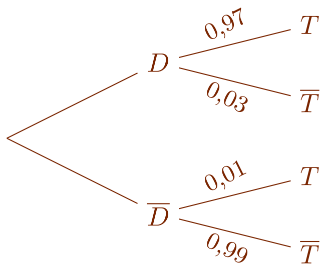
B. $\dfrac{98}{100}$.

C. $\dfrac{29}{500}$.

D. $\dfrac{1}{24}$.

Calculons $\mathbb{P}(D)$.

Nous pouvons schématiser la situation avec l'arbre probabiliste suivant :



Et nous savons que $\mathbb{P}(T) = 0{,}05$.

Puisque $\{D,\overline{D}\}$ constitue un système complet d'événements nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap D) + \mathbb{P}(T \cap \overline{D})$$

En utilisant la définition des probabilités conditionnelles (ou la formule des probabilités composées) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(T) + \mathbb{P}(\overline{D})\mathbb{P}_{\overline{D}}(T) \\
\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}_D(T) + [1 - \mathbb{P}(D)]\,\mathbb{P}_{\overline{D}}(T) \\
0{,}05 &= \mathbb{P}(D) \times 0{,}97 + [1 - \mathbb{P}(D)]\,0{,}01
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
0{,}05 - 0{,}01 &= (0{,}97 - 0{,}01)\mathbb{P}(D) \\
\frac{1}{24} &= \mathbb{P}(D)
\end{aligned}$$

Finalement

Réponse : D. $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{24}$.

QCM 5.

L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation : $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14$ et :

A. $\{-5; 4\}$.

B. $\{-5\}$.

C. $\{4\}$.
D. $\emptyset$.

Résolvons l'équation proposée en procédant par analyse et synthèse.

* Analyse.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Supposons que

$$\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln 14$$

On en déduit :

$$\ln\left[(x+3)(x-2)\right] = \ln 14$$

Et puisque ln est une bijection :

$$(x+3)(x-2) = 14$$

En développant :

$$x^2 + x - 20 = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré deux que nous allons résoudre.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) \\ &= 81\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1-\sqrt{81}}{2\times 1} \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1+\sqrt{81}}{2\times 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} = \{4; -5\}$.

* Synthèse.
Des solutions précédemment obtenues une seule convient, 4, puisque ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réponse : C. $\{4\}$.

QCM 6.

Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{-3\ln x}$ est égale à :

A. x^3.

B. $\frac{1}{x^3}$.

C. $-3x$.

D. $-x^3$.

Exprimons $\mathrm{e}^{-3\ln x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-3\ln x} &= \mathrm{e}^{\ln\left(x^{-3}\right)}\\ &= \exp\circ\ln\left(x^{-3}\right)\\ &= x^{-3}\\ &= \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

Réponse : B.

QCM 7.

L'ensemble des solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation : $(\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 1) \geqslant 0$ est :

A. $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

B. $]-\infty, \ln 3]$.

C. $[\ln 3, +\infty[$.

D. $\mathbb{R}$.

résolvons l'inéquation par analyse-synthèse.

* Analyse.
Procédons à un changement de variable pour simplifier l'inéquation.
Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $X = \mathrm{e}^x$.
X ne peut prendre que des valeurs strictement positives, mais nous y reviendrons dans la phase de synthèse.
Notre inéquation s'écrit maintenant : $(X-3)(X+1) \geqslant 0$.
En utilisant un tableau de signe :

X	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$X-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$X+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(X-3)(X+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi nécessairement : $X \geqslant 3$. Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} e^x &\geqslant 3 \\ \ln\left(e^x\right) &\geqslant \ln 3, \quad \text{car ln est strictement coirssante.} \\ x &\geqslant \ln 3 \end{aligned}$$

* Synthèse.
Si $x \in [\ln 3; +\infty[$, alors $e^x \geqslant 3$ et donc x est bien solution de l'inéquation.

Réponse : C. $[\ln 3, +\infty[$.

Exercice 2. (7 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations, A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée $+1$ *point. Toute réponse fausse est comptée* $-0{,}25$ *points. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QCM 8.

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \left(e^{2x} - x\right)\, dx$.

1. $I = e^2 - 2$.
2. $I = 2e^2 - 2$.
3. $I = \dfrac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

4. $I = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1.$

Calculons I.

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1 \end{aligned}$$

Réponse D. $I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 1.$

QCM 9.

Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1+i}{1-i}$.

A. L'écriture algébrique de z est $-i$.

B. L'écriture algébrique de z est $\sqrt{2}i$.

C. Un argument de z est égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

D. Le module de z est $\sqrt{2}$.

Déterminons l'écriture algébrique de z.

En utilisant les quantités conjuguées :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1^2 + 2i + i^2}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

Réponse : C. Un argument de z est $\frac{pi}{2}$.

QCM 10.

Soit $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x réel.
La dérivée $f'(x)$ de f sur $\mathbb{R}$ est égale à :

A. $3\mathrm{e}^{-x} + 4x$.

B. $(4x - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

C. $-4\mathrm{e}^{-x}$.

D. $(4 - 4x)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminons la dérivée de f.

$f = uv$ avec, pour tout x réel, $u(x) = 4x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $u'(x) = 4$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{x}$.
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' = u'v + uv'$$

Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \mathrm{e}^{-x} + 4x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (4 - 4x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Réponse : D. $f'(x) = (4 - 4x)\mathrm{e}^{-x}$ quelque soit x réel.

QCM 11.

Soit x une variable aléatoire de densité f sur $[-4{,}2]$ telle que $f(x) = a|x|$, $a \in \mathbb{R}$.
Alors a est égale à :

A. $-0{,}2$.

B. $0{,}2$.

C. $0{,}25$.

D. $0{,}1$.

Déterminons la densité f par conditions nécessaire et suffisante.

* Analyse.

Puisque f est une densité de probabilité sur $[-4{,}2]$, nécessairement

$$\int_{-4}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{2} a|t|\ \mathrm{d}t &= 1\\
\int_{-4}^{0} a(-t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{2} at\ \mathrm{d}t &= 1\\
\left[-\frac{a}{2}t^2\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{a}{2}t^2\right]_{0}^{2} &= 1\\
8a + 2a &= 1\\
a &= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

* Synthèse.

Il est clair, en reprenant les précédents calculs, que si $a = 0{,}1$, f, qui est une fonction continue sur $[-4{,}2]$, est bien une densité de probabilité.

Réponse D. $a = 0{,}1$.

QCM 12.

On considère que la durée de vie, exprimée en années, d'un médicament est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ telle que $P(X \leqslant 1) = 0{,}18$, alors :

A. $\lambda = \ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$.

B. $\lambda = -\ln(18)$.

C. $\lambda = -\ln(0{,}82)$.

D. $\lambda = \dfrac{\ln(0{,}82)}{\ln(100)}$.

Déterminons λ.

Par définition de la loi exponentielle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 1) &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t}\,dt\\ &= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^1\\ &= -e^{-\lambda}+1\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$-e^{-\lambda}+1 = 0{,}18$$

donc :

$$\begin{aligned}e^{-\lambda} &= 0{,}82\\ \ln \circ \exp(-\lambda) &= \ln(0{,}82)\\ -\lambda &= \ln(0{,}82)\end{aligned}$$

Réponse : C. $\lambda = -\ln(0{,}82)$.

QCM 13.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $N(0{,}1)$.
$p(-1 < X < 1)$ est égale à :

A. $1-2p(X>1)$.
B. $2\,[p(X<1)-1]$.
C. $1-2p(X<1)$.
D. $2p(X>1)-1$.

X est centrée donc $\mathbb{P}(-1<X<1) = 2\mathbb{P}(0 \leqslant X < 1)$.
De plus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 \leqslant X < 1) &= \mathbb{P}\left(X \in [0,+\infty[\setminus[1,+\infty[\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X \in [0,+\infty[\right) - \mathbb{P}\left(X \in [1,+\infty[\right)\\ &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X>1)\end{aligned}$$

Ainsi

Réponse : A. $\mathbb{P}(-1<X<1) = 1-2\mathbb{P}(X>1)$.

QCM 14.

Après avoir examiné 100 personnes, on a constaté que 20 % d'entre elles étaient malades. L'intervalle de confiance, au niveau asymptotique 95 %, de la probabilité qu'une personne examinée soit malade peut être estimée par :

A. $[0{,}10; 0{,}20]$.

B. $[0{,}15; 0{,}25]$.

C. $[0{,}10; 0{,}30]$.

D. $[0{,}05; 0{,}35]$.

Exercice 3. (6 points)

Après l'administration d'un médicament par voie orale chez un patient, sa concentration plasmatique dans le sang, en g/L, en fonction du temps peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$C(t) = 3\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right), \text{ où } t \text{ est le temps exprimé en heures.}$$

1. Calculer $C(0)$.

   calculons $C(0)$.

$$\begin{aligned} C(0) &= 3\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-2\times 0}\right) \\ &= 3(1-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{C(0) = 0.}$$

2. Déterminer la limite de la fonction C lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat vis-à-vis du patient.

   Déterminons $\lim_{t\to+\infty} C(t)$.

   Il y a une forme indéterminée pour lever l'indétermination factorisons par e^{-t}.

   Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} C(t) &= 3\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{t}\right) \\ &= 3\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous en déduisons $1-\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Enfin : $\mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$. La concentration du médicament tend vers 0, autrement dit le médicament disparaît peu à peu du sang.

3. Calculer la dérivée $C'(t)$ de $C(t)$.

   Calculons C'.

   C est une somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} C'(t) &= 3\left(-\mathrm{e}^{-t}-(-2)\mathrm{e}^{-2t}\right) \\ &= -3\mathrm{e}^{-t}\left(1-2\mathrm{e}^{-t}\right) \end{aligned}$$

> Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $C'(x) = -3\mathrm{e}^{-t}\left(1-2\mathrm{e}^{-t}\right)$.

4. Dresser le tableau complet de variation de la fonction C.

   Dressons le tableau de signe de C'.

   $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ quelque soit $t \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $f \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} 1-2\mathrm{e}^{-t} > 0 &\Leftrightarrow 1 > 2\mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

   Et puisque $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante :

$$\begin{aligned} 1-2\mathrm{e}^{-t} > 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) > -t \\ &\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1}{2}\right) < t \\ &\Leftrightarrow \ln 2 < t \end{aligned}$$

Nous en déduisons le tableau de signe et de variation suivant.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$-3\mathrm{e}^{-t}$		$-$		$-$	
$1-2\mathrm{e}^{-t}$		$-$	0	$+$	
$C'(t)$		$-$	0	$+$	
C	0	$\nearrow$	$C(\ln 2)$	$\searrow$	0

Et

$$\begin{aligned} C(\ln 2) &= 3\left(\mathrm{e}^{-\ln 2} - \mathrm{e}^{-2\ln 2}\right) \\ &= 3\left(\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5. Donner la valeur maximale de la concentration sous sa forme la plus simplifiée.

   D'après la question précédente :

   > La concentration maximale est de 0,75 g/L.

6. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $C(t) = \dfrac{2}{3}$.

   Résolvons l'équation $C(t) = \frac{2}{3}$ dans $\mathbb{R}_+$.

   En procédant au changement de variable $X = -$t l'équation peut s'écrire :

$$3\left(X - X^2\right) = \frac{2}{3}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} X - X^2 &= \frac{2}{9} \\ -X^2 + X - \frac{2}{9} &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation polynomiale de degré deux.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation polynomiale de degré deux admet deux racines distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi nécessairement :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-t} &= \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{3} \\ -t &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{ou} \quad -t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ t &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{ou} \quad t = \ln 3 \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\ln 3$ sont effectivement des solutions de l'équation $C(t) = \frac{2}{3}$.

$C(t) = \frac{2}{3}$ si et seulement si $t \in \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln 3\right\}$.

7. En déduire sur quelle période de temps la concentration du médicament est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

   D'après la question précédente et le tableau de variation de C, nous pouvons affirmer que

   $$\boxed{\text{la concentration en médicament est supérieure à } \tfrac{2}{3} \text{ si et seulement si } t \in \left[\ln\left(\tfrac{3}{2}\right), \ln 3\right].}$$