ESA 2015.

Exercice 1. 7 points.

QCM 1.

Déterminons les éventuelles limites des deux suites proposées.

* $\lim\limits_{n \to +\infty} 12n^2 - 7n - 5 = \lim\limits_{n \to +\infty} 12n^2 = +\infty$
*

Identité remarquable :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} &= \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} = 0$.

$$\boxed{\text{Réponse C.}}$$

QCM 2.

Étudions (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Donc $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$.
Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ la suite converge vers 0.

$$\boxed{\text{Réponse C.}}$$

QCM 3.

Simplifions l'expression de A.

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{e}^3(\mathrm{e}^{-2})^5\mathrm{e} \\ &= \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{5\times(-2)}\mathrm{e}^1 \\ &= \mathrm{e}^{3-10+1} \\ &= \mathrm{e}^{-6} \end{aligned}$$

Réponse C.

QCM 4.

Résolvons l'équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(x^2-2x)} = \frac{1}{\mathrm{e}} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(x^2-2x)}\mathrm{e} = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(x^2-2x+1)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\right) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Réponse B.

QCM 5.

Résolvons l'inéquation.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > 1 &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{1-\frac{x}{5}}\right) > \ln 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{x}{5} > 0 \\ &\Leftrightarrow 5 > x \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty\ ;\ 5[\end{aligned}$$

Réponse A.

QCM 6.

Déterminons la limite en factorisant.

$$x^2 - x\ln x = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Réponse B.

QCM 7.

Résolvons l'équation algébriquement.

Procédons à un changement de variable : $y = \ln x$. Résolvons $2y^2 + 2y - 5 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-5) = 44$.
L'équation admet donc solutions réelles distinctes :

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

D'où les deux solutions possibles : $x_1 = \mathrm{e}^{y_1}$ et $x_2 = \mathrm{e}^{y_2}$.

Réponse C.

Exercice 2. 7 points.

QCM 8.

Réponse D.

On reconnaît une dérivée logarithmique (ou on applique la formule de dérivation d'une fonction composée) :

$$h'(x) = \frac{2x}{4+2x^2}.$$

Réponse : D.

QCM 9.

Pour trouver une primitive de f on utilise la linéarité de la dérivation : il faut chercher des primitives de $x \mapsto \frac{2}{x}$ et de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$.

Or $x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ donc la seule bonne réponse possible est $F(x) = 2\ln(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

Réponse : A.

QCM 10.

Notons $z = \frac{-2i}{3+3i}$. La forme trigonométrique de z est $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{Arg}(z)}$. Or :

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{-2i}{3+3i}\right| \\ &= \frac{|-2i|}{|3+3i|} \\ &= \frac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{3^2+3^3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

donc, nécessairement

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}.$$

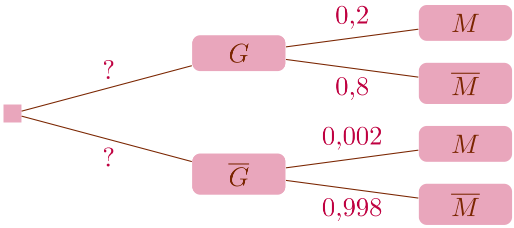
Réponse : D.

QCM 11.

Notons G :« porteur du génotype G » et M :« individu malade ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

D'après l'énoncé $P(M) = \frac{10}{100}$ et :



$\{G; \overline{G}\}$ est un système complet d'événement donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(G \cap M) + \mathbb{P}(\overline{G} \cap M)$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}_G(M) + \mathbb{P}(\overline{G}) \times \mathbb{P}_{\overline{G}}(M) \\
\frac{10}{1000} &= \mathbb{P}(G)\frac{200}{1000} + (1 - \mathbb{P}(G))\frac{2}{1000} \\
10 &= 200\mathbb{P}(G) + 2 - 2\mathbb{P}(G) \\
\mathbb{P}(G) &= \frac{8}{198} \\
\mathbb{P}(G) &\approx \frac{4}{100}
\end{aligned}$$

Réponse : D.

QCM 12.

Déterminons par condition nécessaire et suffisante la valeur de λ.

Pour que f soit la densité d'une loi de probabilité sur $[1\ ;\ 10]$, il faut que f soit continue et positive sur $[1\ ;\ 10]$. Donc nécessairement $\lambda \geq 0$.

Il faut de plus que : $\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$. Or :

$$\begin{aligned}\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_1^{10} \lambda \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\lambda \frac{1}{t}\right]_1^{10} \\ &= -\lambda \frac{1}{10} + \lambda \frac{1}{1} \\ &= \lambda \frac{9}{10}\end{aligned}$$

D'où, nécessairement : $\lambda = \frac{10}{9}$.

Il aisé de vérifier que, réciproquement, pour cette valeur de λ, f est effectivement une fonction continue, positive et $\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

Réponse : A.

QCM 13.

Notons A :« accouchement avant le terme » et C :« accouchement présentant des complications ».

* Calculons $\mathbb{P}(A \cap C)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \frac{10}{100} + \frac{20}{100} - \frac{26}{100} \\ &= \frac{4}{100} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

A et C sont compatibles.

* Déterminons l'éventuelle dépendance de A et C.

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{4}{100}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C) &= \frac{10}{100}\times\frac{20}{100}\\ &= \frac{2}{100}\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(A\cap C)\neq\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)$. A et C sont donc dépendants.

Réponse A.

QCM 14.

La probabilité que l'enfant soit porteur du génotype p/p est $\frac{1}{2}$ puisqu'il recevra forcément le gène p de l'un des parents et soit le gène p soit le gène P de l'autre.

Puisque 90 % des personnes de génotype p/p sont atteintes, la probabilité que l'enfant soit atteint est :

$$\frac{1}{2}\times\frac{90}{100}=0{,}45.$$

Réponse : B.

Exercice 3. 6 points.

1. (a) Calculons T.

Dire que la concentration a diminuée de moitié à l'instant T c'est dire que : $C(T)=\frac{C_0}{2}$. Cette égalité équivaut successivement à :

$$C_0\mathrm{e}^{-kT}=\frac{C_0}{2}$$

Comme $C_0>9$:

$$\mathrm{e}^{-kT}=\frac{1}{2}$$

La fonction ln étant bijective :

$$\begin{aligned} \ln\left(\mathrm{e}^{-kT}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -kT &= -\ln 2 \\ T &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{k}.}$$

(b) Déterminons la concentration au bout de 4 demi-vies.

Au bout de 4 demi-vies la concentration du médicament est :

$$\begin{aligned} C(4T) &= C_0 \exp\left(-k4\frac{\ln 2}{k}\right) \\ &= C_0 \exp\left(-4\ln 2\right) \\ &= C_0 \exp\left(\ln \frac{1}{2^4}\right) \\ &= \frac{C_0}{2^4} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$, donc il a été éliminé à plus de 10%.

> Au bout de 4 demi-vies le médicament a été expulsé à plus de 10 %.

2. (a) Étudions la convergence de D en $+\infty$.

L'expression de D donnée par l'énoncé conduit à une forme indéterminée. Modifions l'expression de D.

En factorisant par $\exp\left(-\frac{t}{100}\right)$:

$$\begin{aligned} D(t) &= 8\exp\left(-\frac{t}{100}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100} + \frac{t}{100}\right)\right] \\ &= 8\exp\left(-\frac{t}{100}\right)\left[1 - \exp\left(\frac{(1-\mathrm{e})t}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{t+\infty} \lim \exp\left(-\dfrac{t}{100}\right) = 0$

et : $\lim\limits_{t\to+\infty} \lim \exp\left(\dfrac{(1-\mathrm{e})t}{100}\right) = 0$ car $1-\mathrm{e}<0$,

donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \lim D(t) = 0.}$$

(b) Calculons D'.

La fonction D est une somme de composées de fonctions affines et exponentielles. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$D'(t) = 8\left[-\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{t}{100}\right) + \frac{\mathrm{e}}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\right]$$

En factorisant par $-\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)$:

$$= -\frac{8}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\left[-\mathrm{e} + \exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right)\right]$$

et donc

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[,\ -\tfrac{2}{25}\exp\left(-\tfrac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\left[\exp\left(\tfrac{(e-1)t}{100}\right) - \mathrm{e}\right].}$$

(c) Étudions le signe de D' sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$D'(t) > 0$$

équivaut successivement à :

$$-\frac{2}{25}\exp\left(-\frac{et}{100}\right)\left[\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) - \mathrm{e}\right] > 0$$

et comme $-\frac{2}{25} < 0$:

$$\exp\left(-\frac{et}{100}\right)\left[\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) - \mathrm{e}\right] < 0$$

La fonction exp étant strictement positive :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) - \mathrm{e} &< 0\\
\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) &< \mathrm{e}\\
\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) &< \exp(1)
\end{aligned}$$

ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\ln\circ\exp\left(\frac{(\mathrm{e}-1)t}{100}\right) &< \ln\circ\exp(1)\\
\frac{(\mathrm{e}-1)t}{100} &< 1\\
t &< \frac{100}{\mathrm{e}-1}
\end{aligned}$$

Donc : $D'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in \left]-\infty\ ;\ \frac{100}{\mathrm{e}-1}\right]$.
De même on montrerait : $D'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{\mathrm{e}-1}$.
On en déduit, en utilisant la limite précédemment déterminée, le tableau de variation de D :

t	0		$\frac{100}{\mathrm{e}-1}$		$+\infty$
$D'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de D	0	$\nearrow$	D_{max}	$\searrow$	0

Ainsi

D est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{100}{\mathrm{e}-1}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{100}{\mathrm{e}-1}\ ;\ +\infty\right[$.

(d) Calculons D_{max}.

D'après le tableau de variation :

$$\begin{aligned}
D_{max} &= D\left(\frac{100}{\mathrm{e}-1}\right)\\
&= 8\left[\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right) - \exp\left(-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right)\right]\\
&= 8\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right)\left[1 - \exp\left(\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right)\right]\\
&= 8\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)
\end{aligned}$$