ESA 2015.

Concours 2015 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

Exercice 1. 7 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.

Toute réponse juste est comptée $+1$ point. Toute réponse fausse est comptée $-0{,}25$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

QCM 1.

La limite quand n tend vers $+\infty$:

A. de $12n^2 - 7n - 5$ vaut -5.

B. de $12n^2 - 7n - 5$ vaut 0.

C. de $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ vaut 0.

D. de $\sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ vaut $\sqrt{3}$.

Déterminons les éventuelles limites des deux suites proposées.

* $\lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2 - 7n - 5 = \lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2 = +\infty$

*

Identité remarquable :

$$\begin{aligned}\sqrt{n+3}-\sqrt{n} &= \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+3}-\sqrt{n}=0$.

Réponse C.

QCM 2.

La suite (u_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $u_n = 3\times 2^{-n}$ est :

A. croissante.

B. convergente vers 3.

C. convergente vers 0.

D. arithmétique.

Étudions (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Donc $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$.
Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ la suite converge vers 0.

Réponse C.

QCM 3.

Le nombre $A = \mathrm{e}^3(\mathrm{e}^{-2})^5\mathrm{e}$ peut également s'écrire :

A. e^{-13}.

B. e^{7}.

C. e^{-6}.

D. e^{-30}.

Simplifions l'expression de A.

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{e}^3(\mathrm{e}^{-2})^5\mathrm{e} \\ &= \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{5\times(-2)}\mathrm{e}^1 \\ &= \mathrm{e}^{3-10+1} \\ &= \mathrm{e}^{-6} \end{aligned}$$

Réponse C.

QCM 4.

L'équation : $\mathrm{e}^{(x^2-2x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet, dans $\mathbb{R}$, pour ensemble de solutions :

A. $\emptyset$.

B. $\{1\}$.

C. $\{1\ ;\ 2\}$.

D. $\{0\ ;\ 2\}$.

Résolvons l'équation.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(x^2-2x)} = \frac{1}{\mathrm{e}} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(x^2-2x)}\mathrm{e} = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(x^2-2x+1)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\right) = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Réponse B.

QCM 5.

L'inéquation : $e^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > 1$ admet, dans $\mathbb{R}$, pour ensemble des solutions :

A. $]-\infty\ ;\ 5[$.

B. $]0\ ;\ 5[$.

C. $]-\infty\ ;\ 0[$.

D. $\left]\dfrac{1}{5}\ ;\ +\infty\right[$.

Résolvons l'inéquation.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} e^{\left(1-\frac{x}{5}\right)} > 1 &\Leftrightarrow \ln\left(e^{1-\frac{x}{5}}\right) > \ln 1 \\ &\Leftrightarrow 1-\frac{x}{5} > 0 \\ &\Leftrightarrow 5 > x \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty\ ;\ 5[\end{aligned}$$

Réponse A.

QCM 6.

La limite de $x^2 - x\ln x$ quand x tend vers $+\infty$ vaut :

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. n'existe pas.

Déterminons la limite en factorisant.

$$x^2 - x\ln x = x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

Or, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Réponse B.

QCM 7.

Le nombre de solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}^{+^*}$: $2(\ln x)^2 + 2\ln x - 5 = 0$ est :

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Résolvons l'équation algébriquement.

Procédons à un changement de variable : $y = \ln x$. Résolvons $2y^2 + 2y - 5 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-5) = 44$.
L'équation admet donc solutions réelles distinctes :

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}$$

D'où les deux solutions possibles : $x_1 = \mathrm{e}^{y_1}$ et $x_2 = \mathrm{e}^{y_2}$.

Réponse C.

Exercice 2. 7 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.
Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fausse est comptée −0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

QCM 8.

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln(4 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est la fonction h' définie sur $\mathbb{R}$ par $h'(x) =$

A. $\dfrac{1}{4 + x^2}$.

B. $\dfrac{-2x}{4 + x^2}$.

C. $\dfrac{x}{4+x^2}$.

D. $\dfrac{2x}{4+x^2}$.

Réponse D.

On reconnaît une dérivée logarithmique (ou on applique la formule de dérivation d'une fonction composée) :

$$h'(x) = \frac{2x}{4+2x^2}.$$

Réponse : D.

QCM 9.

Une primitive de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + \mathrm{e}^{3x}$ est :

A. $F(x) = 2\ln(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

B. $F(x) = -\frac{2}{x^2} + 3\mathrm{e}^{3x}$.

C. $F(x) = 2\ln(3x) + 3\mathrm{e}^{3x}$.

D. $F(x) = 2\ln(x) + 3\mathrm{e}^{2x}$.

Pour trouver une primitive de f on utilise la linéarité de la dérivation : il faut chercher des primitives de $x \mapsto \frac{2}{x}$ et de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$.

Or $x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ donc la seule bonne réponse possible est $F(x) = 2\ln(3x) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

Réponse : A.

QCM 10.

La forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{-2i}{3+3i}$ est :

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$.

B. $\dfrac{-\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$.

C. $\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}$.

Notons $z = \frac{-2i}{3+3i}$. La forme trigonométrique de z est $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{Arg}(z)}$. Or :

$$\begin{aligned}
|z| &= \left|\frac{-2i}{3+3i}\right| \\
&= \frac{|-2i|}{|3+3i|} \\
&= \frac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{3^2+3^3}} \\
&= \frac{2}{3\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

donc, nécessairement

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}.$$

Réponse : D.

QCM 11.

Une maladie survient chez 1% des individus d'une population. Quand le sujet est porteur d'un certain génotype G, il a 20 chances sur 100 de développer la maladie. Quand il ne le porte pas, il a cent fois moins de chance de développer la maladie.

Quelle est la fréquence à 10^{-2} près du génotype G.

A. 0,01.

B. 0,02.

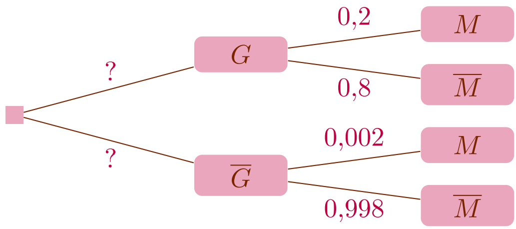
C. 0,03.

D. 0,04.

Notons G :« porteur du génotype G » et M :« individu malade ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

D'après l'énoncé $P(M) = \frac{10}{100}$ et :



$\{G; \overline{G}\}$ est un système complet d'événement donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(G \cap M) + \mathbb{P}(\overline{G} \cap M)$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}_G(M) + \mathbb{P}(\overline{G}) \times \mathbb{P}_{\overline{G}}(M) \\
\frac{10}{1000} &= \mathbb{P}(G)\frac{200}{1000} + (1 - \mathbb{P}(G))\frac{2}{1000} \\
10 &= 200\mathbb{P}(G) + 2 - 2\mathbb{P}(G) \\
\mathbb{P}(G) &= \frac{8}{198} \\
\mathbb{P}(G) &\approx \frac{4}{100}
\end{aligned}$$

Réponse : D.

QCM 12.

P est une loi de probabilité sur $[1\ ;\ 10]$ de densité f définie sur $[1\ ;\ 10]$ par $f(x) = \lambda x^{-2}$. Le réel λ vaut :

A. $\frac{10}{9}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{4}{3}$.

Déterminons par condition nécessaire et suffisante la valeur de λ.

Pour que f soit la densité d'une loi de probabilité sur $[1 ; 10]$, il faut que f soit continue et positive sur $[1 ; 10]$. Donc nécessairement $\lambda \geq 0$.

Il faut de plus que : $\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$. Or :

$$\begin{aligned}\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_1^{10} \lambda\frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\lambda\frac{1}{t}\right]_1^{10} \\ &= -\lambda\frac{1}{10} + \lambda\frac{1}{1} \\ &= \lambda\frac{9}{10}\end{aligned}$$

D'où, nécessairement : $\lambda = \frac{10}{9}$.

Il aisé de vérifier que, réciproquement, pour cette valeur de λ, f est effectivement une fonction continue, positive et $\int_1^{10} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

Réponse : A.

QCM 13.

Dans une maternité on a remarqué que 10% des accouchements avaient lieu avant terme et que 20% des accouchements présentaient des complications.

De plus, les accouchements ayant lieu avant terme ou présentant des complications représentent 26% des accouchements.

Les événements « accouchement avant terme » et « accouchement avec complication » sont :

A. compatibles et dépendants.

B. compatibles et indépendants.

C. incompatibles et dépendants.

D. incompatibles et indépendants.

Notons A :« accouchement avant le terme » et C :« accouchement présentant des complications ».

* Calculons $\mathbb{P}(A \cap C)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup C) \\ &= \frac{10}{100} + \frac{20}{100} - \frac{26}{100} \\ &= \frac{4}{100} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

A et C sont compatibles.

* Déterminons l'éventuelle dépendance de A et C.

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{4}{100}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) &= \frac{10}{100} \times \frac{20}{100} \\ &= \frac{2}{100}\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$. A et C sont donc dépendants.

Réponse A.

QCM 14.

La maladie humaine phénylcétonurie se transmet comme un caractère récessif, la phénylcétonurie étant portée par l'allèle p et l'état normal par P. On suppose que 90% des personnes ayant le génotype p/p sont affectées par cette maladie et que les personnes qui sont soit P/P, soit P/p n'en souffrent pas.

Deux parents, l'un de génotype P/p et l'autre de génotype p/p décident de concevoir un enfant. La probabilité pour un enfant de ce couple d'être atteint de phénylcétonurie est :

A. 0,9.

B. 0,45.

C. 0,23.

D. 0,11.

La probabilité que l'enfant soit porteur du génotype p/p est $\frac{1}{2}$ puisqu'il recevra forcément le gène p de l'un des parents et soit le gène p soit le gène P de l'autre.

Puisque 90 % des personnes de génotype p/p sont atteintes, la probabilité que l'enfant soit atteint est :

$$\frac{1}{2} \times \frac{90}{100} = 0{,}45.$$

Réponse : B.

Exercice 3. 6 points.

Lorsqu'on prend un médicament, il est peu à peu éliminé par l'organisme. La concentration d'un médicament présent dans le sang après t heures est :

$$C(t) = C_0 \mathrm{e}^{-kt}$$

avec :

- t le temps exprimé en minutes ;
- $C(t)$ la concentration à l'instant t exprimée en mg.L^{-1} ;
- C_0 la concentration à l'instant 0 ;
- k un coefficient qui dépend du patient et du médicament.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

1. (a) On appelle demi-vie la durée T au bout de laquelle la concentration a diminuée de moitié.
Calculer T.

Calculons T.

Dire que la concentration a diminuée de moitié à l'instant T c'est dire que : $C(T) = \frac{C_0}{2}$. Cette égalité équivaut successivement à :

$$C_0 \mathrm{e}^{-kT} = \frac{C_0}{2}$$

Comme $C_0 > 9$:

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

La fonction ln étant bijective :

$$\ln\left(e^{-kT}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$-kT = -\ln 2$$
$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

$$\boxed{T = \tfrac{\ln 2}{k}.}$$

(b) Au bout de 4 demi-vies, le médicament est-il éliminé à plus de 10% ? justifier.

Déterminons la concentration au bout de 4 demi-vies.

Au bout de 4 demi-vies la concentration du médicament est :

$$\begin{aligned} C(4T) &= C_0 \exp\left(-k4\frac{\ln 2}{k}\right) \\ &= C_0 \exp\left(-4\ln 2\right) \\ &= C_0 \exp\left(\ln \frac{1}{2^4}\right) \\ &= \frac{C_0}{2^4} \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$, donc il a été éliminé à plus de 10%.

Au bout de 4 demi-vies le médicament a été expulsé à plus de 10 %.

2. Dans cette question, on considère un patient donné qui absorbe par voie orale un médicament donné. Le principe actif n'est pas immédiatement présent dans le sang . Sa concentration est modélisée par la fonction D définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$D(t) = 8\left[\exp\left(-\frac{t}{100}\right) - \exp\left(-\frac{et}{100}\right)\right]$$

(a) Étudier la limite de la fonction D lorsque t tend vers $+\infty$.

Étudions la convergence de D en $+\infty$.

L'expression de D donnée par l'énoncé conduit à une forme indéterminée. Modifions l'expression de D.

En factorisant par $\exp\left(-\frac{t}{100}\right)$:

$$\begin{aligned} D(t) &= 8\exp\left(-\frac{t}{100}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}+\frac{t}{100}\right)\right] \\ &= 8\exp\left(-\frac{t}{100}\right)\left[1-\exp\left(\frac{(1-\mathrm{e})t}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{t+\infty} \lim \exp\left(-\dfrac{t}{100}\right) = 0$

et : $\lim\limits_{t\to+\infty} \lim \exp\left(\dfrac{(1-\mathrm{e})t}{100}\right) = 0$ car $1-\mathrm{e}<0$,

donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \lim D(t) = 0.}$$

(b) Montrer que la dérivée D' de la fonction D sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est donnée par :

$$D'(t) = -\frac{2}{25}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}t}{100}\right)\left[\exp\left(\frac{t(\mathrm{e}-1)}{100}\right)-\mathrm{e}\right]$$

Calculons D'.

La fonction D est une somme de composées de fonctions affines et exponentielles. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$D'(t) = 8\left[-\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{t}{100}\right)+\frac{\mathrm{e}}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\right]$$

En factorisant par $-\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)$:

$$= -\frac{8}{100}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\left[-\mathrm{e}+\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right)\right]$$

et donc

$$\boxed{\forall t \in [0;+\infty[,\ -\tfrac{2}{25}\exp\left(-\tfrac{\mathrm{e}\cdot t}{100}\right)\left[\exp\left(\tfrac{(e-1)t}{100}\right)-\mathrm{e}\right].}$$

(c) Étudier les variations de la fonction D.

Étudions le signe de D' sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$D'(t) > 0$$

équivaut successivement à :

$$-\frac{2}{25}\exp\left(-\frac{et}{100}\right)\left[\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right)-\mathrm{e}\right] > 0$$

et comme $-\frac{2}{25} < 0$:

$$\exp\left(-\frac{et}{100}\right)\left[\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right)-\mathrm{e}\right] < 0$$

La fonction exp étant strictement positive :

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right)-\mathrm{e} &< 0\\ \exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) &< \mathrm{e}\\ \exp\left(\frac{(e-1)t}{100}\right) &< \exp(1)\end{aligned}$$

ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\ln\circ\exp\left(\frac{(\mathrm{e}-1)t}{100}\right) &< \ln\circ\exp(1)\\ \frac{(\mathrm{e}-1)t}{100} &< 1\\ t &< \frac{100}{\mathrm{e}-1}\end{aligned}$$

Donc : $D'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in \left]-\infty\ ;\ \frac{100}{\mathrm{e}-1}\right[$.

De même on montrerait : $D'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{\text{e}-1}$.
On en déduit, en utilisant la limite précédemment déterminée, le tableau de variation de D :

t	0		$\frac{100}{\text{e}-1}$		$+\infty$
$D'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de D	0	$\nearrow$	D_{max}	$\searrow$	0

Ainsi

D est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{100}{\text{e}-1}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{100}{\text{e}-1}\ ;\ +\infty\right[$.

(d) Déterminer la concentration maximale D_{max}.

Calculons D_{max}.

D'après le tableau de variation :

$$\begin{aligned}
D_{max} &= D\left(\frac{100}{\text{e}-1}\right)\\
&= 8\left[\exp\left(-\frac{1}{\text{e}-1}\right) - \exp\left(-\frac{\text{e}}{\text{e}-1}\right)\right]\\
&= 8\exp\left(-\frac{1}{\text{e}-1}\right)\left[1 - \exp\left(\frac{1-\text{e}}{\text{e}-1}\right)\right]\\
&= 8\exp\left(-\frac{1}{\text{e}-1}\right)\left(1-\text{e}^{-1}\right)
\end{aligned}$$