# ESA 2014.

Concours 2014 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

## Exercice 1. 7 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**

Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 Soit la fonction $h$ définie pour tout réel $x$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x + 4$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $h$.

A. $h'(x) = e^{-x} - 1$.

B. $h$ admet un maximum.

C. $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale.

D. l'équation $h(x) = 5$ a une solution unique dans l'ensemble des réels.

Réponse D.
$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ :

$$h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1$$

Donc :

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} < -1$$

L'exponentielle étant toujours positive on en déduit le tableau de variation de $h$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $-$ | |
| $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Seule la réponse D est cohérente avec ce tableau de variation.

QCM 2 Dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation $-2x\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

(a) $\emptyset$.

(b) $\{0\}$.

(c) $]-\infty; 0]$.

(d) $[0; +\infty[$ .

Réponse C.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x+1} > 0$
donc :

$$-2x\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

QCM 3 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$.

On pourra, pour calculer $I$, utiliser la dérivée de la fonction $h$ définie sur $[1; \mathrm{e}]$ par $h(t) = t^3[3\ln(t) - 1]$.

La valeur exacte de $I$ est :

A. $(2e^3 + 1)/9$.

B. $2e^3 + 1$.

C. $(e^2 - 2e)/9$.

D. $(e^2 + 2e)/9$.

réponse A.
$h$ est définie et dérivable sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ et pour tout $x$ dans cet intervalle :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (3x^2)[3\ln(x) - 1] + x^3\left[\frac{3}{x}\right] \\ &= 9x^2\ln(x) - 3x^2 + 3x^2 \\ &= 9x^2\ln(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$x^2\ln(x) = \frac{1}{9}h'(x)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9}\left[h'(x)\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{9}\left[h(\mathrm{e}) - h(1)\right] \end{aligned}$$

Or $h(\mathrm{e}) = 2\mathrm{e}^3$ et $h(1) = -1$, donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9}\left[2\mathrm{e}^3 + 1\right] \\ &= \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9} \end{aligned}$$

QCM 4 Soit la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\cos x$.
La dérivée $f'$ de $f$ est définie pour tout réel $x$ par $f'(x) =$ :

A. $-\sin x$.

B. $\cos x$.

C. $\cos x + x\sin x$.

D. $\cos x - x\sin x$.

Réponse D.

QCM 5 Soit la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\cos x$.
La primitive $F$ de $f$ telle que $F(0) = 1$ est définie pour tout réel $x$ par $F(x) =$ :

A. $\frac{x^2}{2}\sin x + 1$.

B. $-\frac{x^2}{2}\sin x + 1$.
C. $\cos x + x\sin x$.
D. $\cos x - x\sin x$.

Réponse C.
La condition $F(0) = 1$ est vraie pour tous.
On peut dériver toutes les propositions pour retrouver $f$.
Il est également possible (hors programme) de procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x t\cos t \text{ d}t + 1 &= [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t \text{ d}t + 1 \\ &= x\sin x - [-\cos t]_0^x + 1 \\ &= x\sin(x) + \cos(x) - \cos(0) + 1 \\ &= \cos x + x\sin x\end{aligned}$$

QCM 6 L'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{3x}{x^2-1}\text{d}x$ est égale à :

A. $3\ln(12)$.
B. $1,5\ln(5)$.
C. $1,5\ln(12)$.
D. autre.

Réponse B.
La forme de la fonction à intégrer autant que la forme des propositions incitent à penser à une dérivée logarithmique.
Notons : $f(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2-1)$.
On remarque que $f'(x) = \frac{3x}{x^2-1}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}I &= [f(x)]_2^4 \\ &= f(4) - f(2) \\ &= \frac{3}{2}\ln(4^2-1) - \frac{3}{2}\ln(2^2-1) \\ &= \frac{3}{2}[\ln(15) - \ln(3)] \\ &= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{15}{3}\right) \\ &= 1,5\ln(5)\end{aligned}$$

QCM 7 On considère la fonction $f$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2\ln x}{x}$.
La limite de $f$ en $+\infty$ est égale à :

A. 0.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 1.

Réponse B.

$$f(x) = -x - 2\frac{\ln x}{x}$$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

## Exercice 2 — 7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**

Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + \mathrm{i}$ est :

A. $18 - \mathrm{i}$.

B. 1.

C. $3 + \mathrm{i}$.

D. $9 - \mathbf{i}$.

Réponse C.
Notons $y$ la partie imaginaire de $z$. D'après l'équation on a l'égalité sur les parties imaginaires : $2y - y = 1$. Donc : $y = 1$.

QCM 2 On considère la suite $u$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ :

A. la suite $u$ est géométrique.

B. la suite $u$ est arithmétique.

C. la suite $u$ est majorée par 3.

D. la suite $u$ est convergente vers 2.

Réponse C.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
Notons : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{n+1} - u_n$.
Nous remarquons : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$. Autrement dit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Exprimons $u_n$ avec $w_n$ en remarquant le télescopage des termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = u_n - u_0$$

La somme des premiers termes d'une suite géométrique nous permet d'écrire :

$$w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = u_n - 1$$

Or $w_0 = u_1 - u_0 = \frac{1}{3}u_0 + 2 - u_0 = \frac{4}{3}$, donc :

$$\frac{4}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\frac{2}{3}} + 1 = u_n$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] + 1 = u_n$$

$$2\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] + 1 = u_n$$

Nous remarquons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, convergente vers 3. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 3$.

Correction courte.
$u$ n'est ni arithmétique ni géométrique et si elle converge vers une limite $l$ alors nécessairement $l = \frac{1}{3}l + 2 \Leftrightarrow l = 3$. Les réponses A, B et D sont donc exclues.

QCM 3 On considère trois suites $u$, $v$, et $w$ qui vérifient la propriété suivante :
Pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n < v_n < w_n$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n}$, alors :

A. on ne peut pas dire que la suite $(v_n)$ converge.

B. la suite $(v_n)$ n'a pas de limite.

C. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) > 2$.

D. $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 2$.

Réponse D.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n+\infty} u_n = 2 \\ \lim\limits_{n+\infty} u_n + \dfrac{1}{n} = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n < w_n \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n+\infty} v_n = 2$$

QCM 4 Un sac contient 4 boules noires et 3 boules rouges.On tire successivement et sans remise 2 boules du sac. Sachant que la première boule tirée est noire, la probabilité de la seconde soit noire est

A. $\dfrac{2}{7}$.

B. $\dfrac{4}{7}$.

C. $\dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{2}{3}$.

Réponse C.
Si la première boule est noire alors le tirage de la seconde boule se fait parmi 3 noires et 3 rouge. Les tirages étant, *a priori*, équiprobables on en déduit la probabilté d'obtenir une boule noire : $P(N) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

QCM 5 On lance un dé cubique bien équilibré et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de dé.
Soit les événements :
$I$ : « le numéro est inférieur ou égal à 3 ».
$M$ : « le numéro est un multiple de 3 ».

A. $P(I \cup M) = \frac{5}{6}$.

B. $P(I \cap M) = \frac{1}{2}$.

C. $I$ et $M$ sont incompatibles.

D. $I$ et $M$ sont indépendants.

Réponse D.
$I = \{ 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \}$ et $M = \{ 3 \; ; \; 6 \}$. Donc : $P(I \cup M) = \frac{4}{6}$, $P(I \cap M) = \frac{1}{6}$.
$P(I)+P(M) = \frac{1}{2}+\frac{2}{6} = \frac{5}{6} \neq \frac{4}{6} = P(I \cup M)$ : $I$ et $M$ sont donc compatibles.
$P(I) \times P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = P(I \cap M)$ : $I$ et $M$ sont indépendants.

QCM 6 Une maladie frappe 2 % de la population d'un pays. Pour dépister cette maladie, on utilise un test. On sait que :

— la probabilité que le test soit positif, sachant que l'individu est malade, est 0,9 ;

— la probabilité que le test soit négatif, sachant que l'individu n'est pas malade, est 0,9.

On note les événements :

$M+$ : « l'individu est malade »

$M-$ : « l'individu n'est pas malade »

$T+$ : « le test est positif »

$T-$ : « le test est négatif »

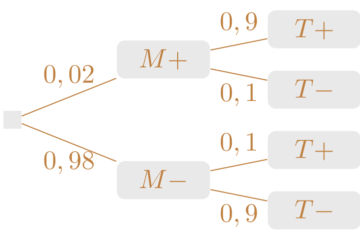
A. $P_{M+}(T+)$ vaut 0,1.

B. $P(T+)$ vaut 0,278.

C. $P(T+)$ vaut 0,22.

D. $P_{T+}(M+)$ vaut 0,16.

Réponse D.




D'après l'arbre : $P_{M+}(T+) = 0,9$.

Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T+) &= P(M+\cap T+) + P(M-\cap T+) \\ &= P(M+) \times P_{M+}(T+) + P(M+) \times P_{M-}(T+) \\ &= 0,02 \times 0,9 + 0,98 \times 0,1 \\ &= 0,018 + 0,098 \\ &= 0,116 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{T+}(M+) &= \frac{P(M+\cap T+)}{P(T+)} \\ &= \frac{0,02 \times 0,9}{0,116} \\ &= \frac{0,018}{0,116} \\ &= \frac{18}{116} \\ &= \frac{9}{58} \end{aligned}$$

QCM 7 $X$ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[2;20]$.
La probabilité $P_{X>6}(5 < X < 10)$ est égale à :

(a) $\frac{5}{18}$.
(b) $\frac{5}{14}$.
(c) $\frac{2}{7}$.
(d) $\frac{1}{4}$.

Réponse C.
La densité de la loi uniforme sur $[2~;~20]$ est définie par :

$$\forall t \in [2~;~20],\ f(t) = \frac{1}{20-2} \text{ et sinon } f(t) = 0$$

$$\begin{aligned} P_{X>6}(5 < X < 10) &= \frac{P\left[(5 < X < 10) \cap (6 < X)\right]}{P(6 < X)} \\ &= \frac{P(5 < X < 10)}{P(6 < X)} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}P(6 < X < 10) &= \int_6^{10} \frac{\mathrm{d}t}{18} \\ &= \frac{1}{18}\,[t]_6^{10} \\ &= \frac{4}{18} \\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}P(6 < X) &= \int_6^{20} \frac{\mathrm{d}t}{18} \\ &= \frac{14}{18} & = \frac{7}{9}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}P_{X>6}(5 < X < 10) &= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{9}} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

## Exercice 3 6 points

Un essai thérapeutique est réalisé chez des patients atteints d'une maladie associée à une très forte mortalité. Les données de cet essai sont correctement ajustées par un modèle de survie exponentielle.

Soit $X_A$ la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_A = 0,22$.

C'est à dire $P(X_A \leqslant t) = \int_0^t 0,22\mathrm{e}^{-0.22x}\mathrm{d}x$.

Soit $X_B$ la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_B = 0,11$.

C'est à dire $P(X_B \leqslant t) = \int_0^t 0,11\mathrm{e}^{-0.11x}\mathrm{d}x$.

$t$ représente le temps en années avec $t \geqslant 0$.

Avec un traitement $A$, la probabilité de survie à l'instant $t$ est égale à $S_A(t) = P(X_A > t)$.

Avec un traitement $B$, la probabilité de survie à l'instant $t$ est égale à $S_B(t) = P(X_B > t)$.

Aide aux calculs $\mathrm{e}^{-2,2} \approx 0,111$ et $\sqrt{0,111} \approx 0,333$.

1. Calculer $P(X_A \leqslant 10)$.

$$\begin{aligned} P(X_A \leq 10) &= \int_0^{10} 0,22\mathrm{e}^{-0,22x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-0,22x}\right]_0^{10} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0,22\times 10} \\ &\approx 1 - 0,111 \\ &\approx 0,999 \end{aligned}$$

2. Démontrer que pour tout réel $t$ positif, $S_A(t) = \mathrm{e}^{-0,22t}$.

$$\begin{aligned} S_A(t) &= P(X_A > t) \\ &= 1 - P(X_A \leq t) \\ &= 1 - \int_0^{t} 0,22\mathrm{e}^{-0,22x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0,22x}\right]_0^{t} \\ &= 1 - 1 + \mathrm{e}^{-0,22\times t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,22t} \end{aligned}$$

3. Donner le tableau de variation complet de la fonction $S_A$. Justifier.

   La fonction $S_A$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$ :

$$S_A'(t) = -0,22\mathrm{e}^{-0,22t}$$

   Donc $S_A$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,22t} = 0$
   On en déduit le tableau de variation de $S_A$.

| $t$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $S'_A(t)$ | $-$ |
| $S_A(t)$ | $1 \searrow 0$ |

Car $S_A(0) = 1$.

4. Calculer la probabilité de survie à 10 ans dans le cas du traitement B.

   En procédant de même que pour le traitement $A$ on obtient : $S_B(t) = \mathrm{e}^{-0,11t}$.
   La probabilité de survie à 10 ans dans le cas du traitement $B$ est donc :

$$\begin{aligned} S_B(10) &= \mathrm{e}^{-0,11\times 10} \\ &= \mathrm{e}^{-1,1} \\ &= \left(\mathrm{e}^{-2,2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\mathrm{e}^{-2,2}} \\ &\approx \sqrt{0,111} \\ &\approx 0,333 \end{aligned}$$

5. Calculer la probabilité de survie à 5 ans dans le cas du traitement A.

$$\begin{aligned} S_A(5) &= \mathrm{e}^{-0,22\times 5} \\ &= \mathrm{e}^{-1,1} \end{aligned}$$

   Et comme à la question précédente :

$$\approx 0,333$$

6. Le rapport de survie des traitements A et B est-il constant au cours du temps ?

   le rapport de survie est :

$$\begin{aligned} \frac{S_A(t)}{S_B(t)} &= \frac{\mathrm{e}^{-0,22t}}{\mathrm{e}^{-0,11t}} \\ &= (-0,22+0,11)\mathrm{t} \\ &= -0,11\mathrm{t} \end{aligned}$$

Ce n'est donc pas une fonction constante du temps.

7. Pour $t$ fixé, établir la relation entre la survie dans le cas du traitement A et la survie dans le cas du traitement B.

   Comme : $\mathrm{e}^{-0,22t} = \mathrm{e}^{2\times(-0,11)t} = \left(\mathrm{e}^{-0,11t}\right)^2$ on en déduit : $S_A(t) = [S_B(t)]^2$.