ESA 2013.

Concours 2013 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

Exercice 1. 7 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**

Toute réponse juste est comptée $+1$point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{\mathrm{e}^x}$ est égale à :

A. 2.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Réponse C.
$\dfrac{2x+3}{\mathrm{e}^x} = (-2y+3)\mathrm{e}^y$, avec $y=-x$. On en déduit la limité lorsque $y \to +\infty$.

QCM 2 On considère une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. On note u' sa fonction dérivée. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à I par $f(x) = \ln(u(x))$.

A. on ne peut pas déterminer le sens de variation de f .

B. la fonction f est décroissante sur I.

C. la fonction f est croissante sur I.

D. la fonction f est croissante puis décroissante sur I.

Réponse A.
Si $u(x) = x$ et $I = [1\ ;\ 2]$, alors $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur I.
Si $u(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [1\ ;\ 2]$, alors $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$ et donc f est strictement décroissante.

QCM 3 Dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$

A. admet une unique solution.

B. admet exactement deux solutions.

C. admet une infinité de solutions.

D. n'admet aucune solution.

Réponse A.
Changement de variable : $Y = \mathrm{e}^x$ avec $Y \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation s'écrit alors : $Y^2 + 2Y - 3 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 16$. Donc deux solutions possibles :

$$Y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3 \qquad Y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$$

Mais comme $Y > 0$ une seule solution est possible :

$$\begin{aligned} Y &= 1 \\ \mathrm{e}^x &= 1 \\ \ln\left[\mathrm{e}^x\right] &= \ln 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

QCM 4 Dans une bibliothèque, on trouve 150 romans et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les deux cents ouvrages.

La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

A. $0,9$.

B. $0,475$.

C. $0,7$.

D. $0,3$.

Réponse B.

Il est possible d'utiliser la formule des probabilités totales. Il est également possible de calculer directement le nombre d'ouvrages en français :

$$\frac{40}{100} \times 150 + \frac{70}{100} \times 50 = \frac{6000}{100} + \frac{3500}{100} = \frac{9500}{100} = 95$$

La probabilité de choisir un livre écrit par un Français est :

$$\frac{95}{200} = \frac{47,5}{100} = 0,475$$

QCM 5 On considère les points A, B, C d'affixes respectives : $a = -1 + \mathrm{i}$; $b = 2\mathrm{i}$; $c = 2 - 2\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

A. quelconque.

B. isocèle en A.

C. rectangle en A.

D. rectangle en C.

Réponse A.

Qu'il soit isocèle ou rectangle il faudra calculer les longueurs des côtés.

$$\begin{aligned} AB &= |a - b| \\ &= |-1 + i - (2i)| \\ &= |-1 - i| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC &= |a-c| \\ &= |-1+i-(2-2i)| \\ &= |-3-i| \\ &= \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC &= |b-c| \\ &= |2i-(2-2i)| \\ &= |-2+4i| \\ &= \sqrt{(-2)^2+4^2} \\ &= \sqrt{20}\end{aligned}$$

Si ABC est rectangle alors ce ne peut être qu'en A (car l'hypoténuse serait alors le plus long côté à savoir $[BC]$). Or l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc ABC n'est pas rectangle.
Il n'est clairement pas non plus isocèle.

QCM 6 On considère trois suite (u_n), (v_n), (w_n) qui vérifient la propriété suivante :
Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :

(a) $\lim w_n = 0$.

(b) $\lim v_n = 2$.

(c) $\lim u_n = -1$.

(d) la suite (v_n) n'a pas de limite.

Réponse B.

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2 \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 2$$

d'après le théorème d'encadrement des limites.

Exercice 2. 8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

Dans le repère orthonormé d'unité 2 cm ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Première partie.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

   - Étudions $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

     $$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} 3\mathrm{e}^x = 0\\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = 0$$

     Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

   - Étudions $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

     Nous modifions la présentation de f en, pour tout $x \in \mathbb{R}$

     $$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{3}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}}$$

     Puis

     $$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} = 3\right)$$

     Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ et la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

   Déterminons l'expression de f'.

   Notons $u(x) = 3\mathrm{e}^x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Comme $f = \frac{u}{v}$, que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \end{aligned}$$

3. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation complété des limites.
   Étudions le signe de f'.

$$\forall x \mathbb{R},\ \begin{cases} \left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0 \\ 3\mathrm{e}^x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} > 0$$

   Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$.

   Nous en déduisons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	3

4. Déterminer une équation de la droite D.
   Déterminons l'équation de D.
   La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ existe et admet une équation réduite puisque f est dérivable en 0.

De plus cette équation réduite s'écrit successivement

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ y &= \frac{3\mathrm{e}^0}{\left(\mathrm{e}^0+1\right)^2}x + \frac{3\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Une lecture graphique de cette équation était sans doute acceptable.

Deuxième partie.

1. Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.
   Déterminons F.

   f étant continue sur $\mathbb{R}$ elle est intégrable sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
   F est la primitive de f qui s'annule en 0. Autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $$F(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

   Nous remarquons dans l'expression de f une dérivée logarithmique : $f(x) = 3\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et u est strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'où

   $$\begin{aligned} F(x) &= \left[3\ln\left(\mathrm{e}^t+1\right)\right]_0^x \\ &= 3\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 3\ln\left(\mathrm{e}^0+1\right) \\ &= 3\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 3\ln 2 \end{aligned}$$

2. Vérifier que $F(1) = 3\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

   $$\begin{aligned} F(1) &= 3\ln\left(\mathrm{e}^1+1\right) - 3\ln 2 \\ &= 3[\ln(\mathrm{e}+1) - \ln(2)] \\ &= 3\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

3. Sur le graphe ci-dessous, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer l'aire en unités d'aires de ce domaine.
   Interprétons l'aire grisée.

L'aire grisée est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ La fonction f est positive donc l'aire grisée est l'intégrale de f sur $[0, 1]$.

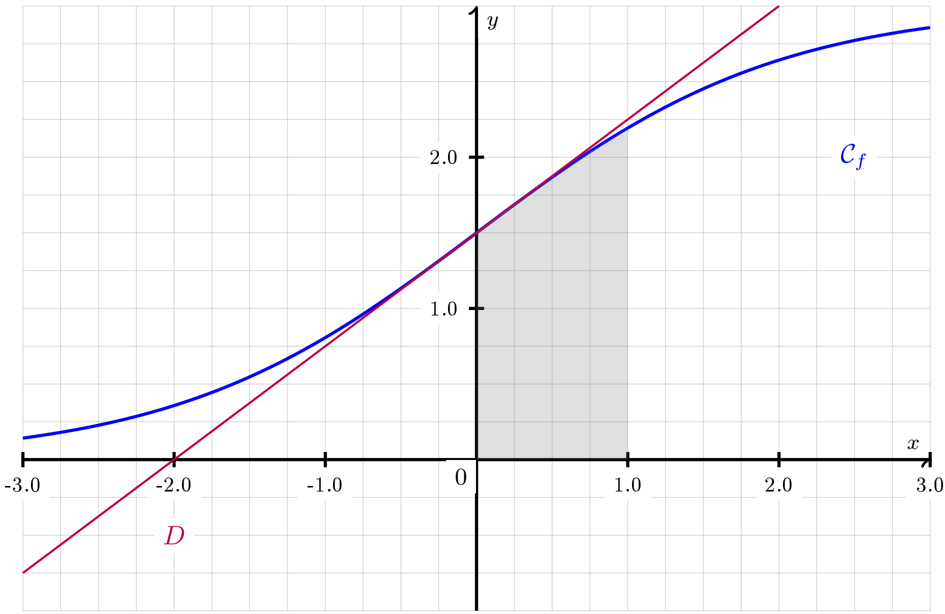
Calcul de l'aire.

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = F(1) - F(0)$$

Or $F(0) = 0$ par construction de F et $F(1) = 3\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$ d'après la question précédente, donc

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 3\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$$

Comme dans le repère orthomormé une unité correspond à 2 cm (et donc 1 u.a. $\leftrightarrow$ 4 cm^2) l'aire en unités d'aire du domaine grisé est $12\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.



Exercice 3. 6 points

Une usine d'assemblage de pièces détachées possède 100 robots. On considère que chacun de ces robots a une probabilité de $0,1$ d'être en panne. Le bon fonctionnement d'un robot est indépendant des autres robots. Soit X le nombre de robots en panne dans cette usine.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier soigneusement. Donner l'expression de $P(X = k)$, pour tout $k \in \{0, \dots, 100\}$.
   Montrons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,1)$.

   - Vérifier le bon fonctionnement d'un robot constitue une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le robot est en panne » a une probabilité de $p = 0,1$.
   - L'épreuve de Bernoulli est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 100$ fois. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

   X qui compte e nombre de succès du schéma de Bernoulli suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,1$.

   Expression de $P(X = k)$.

   Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, 100\}$

   $$P(X = k) = \binom{100}{k} 0,1^k (1 - 0,1)^{100-k}$$

2. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.
   Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,1)$ alors son espérance est

   $$E(X) = np = 100 \times 0,1 = 10$$

   sa variance est

   $$V(X) = np(1 - p) = 9$$

   et son écart type est

   $$\sigma = \sqrt{V(X)} = 3$$

Pour la suite de l'exercice, on donne les valeurs des $P(X = k)$ et des $P(X \leqslant k)$ pour k variant de 0 à 20 arrondi à 10^{-5} près.

k	$p(X = k)$	$p(X \leqslant k)$
0	0,000 03	0,000 03
1	0,000 30	0,000 32
2	0,001 62	0,001 94
3	0,005 89	0,007 84
4	0,015 87	0,023 71
5	0,033 87	0,057 58
6	0,059 58	0,117 16
7	0,088 90	0,206 05
8	0,114 82	0,320 87
9	0,130 42	0,451 29
10	0,131 87	0,583 16
11	0,119 88	0,703 03
12	0,098 79	0,801 82
13	0,074 30	0,876 12
14	0,051 30	0,927 43
15	0,032 68	0,960 11
16	0,019 29	0,979 40
17	0,010 59	0,989 99
18	0,005 43	0,995 42
19	0,002 60	0,998 02
20	0,001 17	0,999 19

3. Quelle est la probabilité que dans un lot de 100 robots, il y ait au moins trois robots défectueux ?

   La probabilité que dans un lot de 100 robots, il y ait au moins trois robots défectueux est

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 0{,}001\,94 \end{aligned}$$

4. Déterminer au seuil de 95 % l'intervalle de fluctuation associé à la loi vérifiée par X.

   Nous lisons dans le tableau :

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &\leq 0,025 \\ P(X \leq 5) &> 0,025 \\ P(X \leq 15) &< 0,975 \\ P(X \leq 16) &\geq 0,975 \end{aligned}$$

Donc l'intervalle de fluctuation, au seuil de 95 % associé à la loi vérifiée par X est : $\left[\frac{5}{100}, \frac{16}{100}\right]$.