ESA 2012.

Concours 2013 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

Exercice 1. 6 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**

Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 On considère, dans le plan complexe, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{N}} = \frac{3}{2} + \mathrm{i}.$$

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point J. L'affixe de J est :

A. $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

B. $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

C. $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

D. $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

QCM 2 Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants. Il a une chance sur trois de réussir au concours C_1 et une chance sur trois de réussir au concours C_2.
La probabilité P pour que l'élève réussisse au moins un concours est :

A. $\frac{5}{9}$.
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{1}{9}$.
D. $\frac{2}{9}$.

QCM 3 On considère l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$.
B. $I = 0$.
C. $I = 1$.
D. $I = 2$.

QCM 4 Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}$ est :

A. $]0\ ;\ +\infty[$.
B. $]1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.
C. $]1\ ;\ +\infty[$.
D. $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

QCM 5 Toute suite (u_n) avec $n > 0$ telle que : $\frac{2}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ est :

A. croissante.
B. bornée.
C. convergente.
D. divergente.

QCM 6 Une solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 4e^{-2x}$ est :

A. $e^{-3x} + \frac{4}{3}e^{-2x}$.

B. $4e^{-3x} - 1$.

C. $4e^{-3x} - \frac{1}{3}$.

D. $4e^{-2x}$.

Exercice 2. 6 points

On considère le nombre complexe $z = 1 - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

1. Écrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2.
3. En utilisant les propriétés du module et de l'argument d'un produit déterminer la forme trigonométrique de z.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

Exercice 3. 8 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)e^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(0, I, J)$. (Unité graphique : 2 cm). Vous justifierez chacune de vos réponses.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x.
3. Donner le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 5x - 4$.
4. En déduire le signe de la fonction f'.
5. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement .
6. Déterminer les variations de f et dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

7. Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$.

On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

8. Déterminer la valeur exacte de I_2 et I_3.
9. Déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.