ESA 2012.

Concours 2013 d'admission dans les écoles du service de santé des armées .
Catégorie baccalauréat - Sections : Médecine - Pharmacie.

Avertissement :

- L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
- Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
- Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
- Les candidats traiteront les trois exercices.
- Les réponses des exercices $n°1$ et $n°2$ (QCM) seront données sur une grille prévue à cet effet.
- L'exercice $n°3$ sera traité sur une copie à part.

Exercice 1. 6 points.

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui parait exacte **en cochant sur la grille prévue à cet effet.**

Toute réponse juste est comptée +1point. Toute réponse fausse est comptée $-0,5$ point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1 On considère, dans le plan complexe, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{N}} = \frac{3}{2} + \mathrm{i}.$$

Le milieu I du segment $[MN]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point J. L'affixe de J est :

A. $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

B. $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

C. $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

D. $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

Réponse C.
Affixe de I milieu de $[MN]$: $z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = 1 + \mathrm{i}$.
Puisque J est l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{z_J - z_O}{z_I - z_O}$
Donc : $z_J = z_I \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Or : $z_I = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc : $z_J = \sqrt{2}\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.

QCM 2 Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants. Il a une chance sur trois de réussir au concours C_1 et une chance sur trois de réussir au concours C_2.
La probabilité P pour que l'élève réussisse au moins un concours est :

A. $\dfrac{5}{9}$.
B. $\dfrac{2}{3}$.
C. $\dfrac{1}{9}$.
D. $\dfrac{2}{9}$.

Réponse A.
La probabilité qu'il réussisse au moins l'un des concours est : $P(C_1 \cup C_2)$.
Or : $P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + p(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$ et comme les probabilités sont indépendantes : $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2)$, donc $P(C_1 \cup C_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$.

QCM 3 On considère l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$.
B. $I = 0$.
C. $I = 1$.
D. $I = 2$.

Réponse C.
$\frac{2}{x^2+2x+1} = \frac{2}{(x+1)^2}$
Et une primitive de cette fonction est : $x \mapsto \frac{-2}{x+1}$, donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-2}{x+1}\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

QCM 4 Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x-1)}$ est :

A. $]0\ ;\ +\infty[$.
B. $]1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.
C. $]1\ ;\ +\infty[$.
D. $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Réponse B.
Il faut que $\ln(x-1)$ soit définie donc : $x-1>0$ c'est-à-dire $x>1$. Et de plus il faut que le dénominateur $\ln(x-1)$ soit non nul et donc $x \neq 2$.
D'où l'ensemble de définition : $]1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

QCM 5 Toute suite (u_n) avec $n>0$ telle que : $\dfrac{2}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$ est :

A. croissante.
B. bornée.
C. convergente.
D. divergente.

Réponse B.
$\left(\frac{2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0.
$\left(\frac{1}{n}+1\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et pour $n=1$ elle vaut 2.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq 2$.

QCM 6 Une solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 4\mathrm{e}^{-2x}$ est :

A. $\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-2x}$.
B. $4\mathrm{e}^{-3x} - 1$.

C. $4\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{1}{3}$.

D. $4\mathrm{e}^{-2x}$.

Réponse D.
L'approche la plus simple consiste à tester toutes les réponses proposées.

Exercice 2. 6 points

On considère le nombre complexe $z = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

1. Écrire z^2 sous forme algébrique.
   Recherchons l'expression algébrique de z^2.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left[(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})\right]^2 \\ &= (1-\sqrt{3})^2 + 2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) + i^2(1+\sqrt{3})^2 \\ &= (1-2\sqrt{3}+3) + 2i(1^2 - \sqrt{3}^2) - 1(1+2\sqrt{3}+3) \\ &= -4\sqrt{3} - 4i \end{aligned}$$

2. Déterminer le module et un argument de z^2.
   - Calcul du module de z^2.

$$|z^2| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

   - Déterminons un argument de z^2.

   Notons θ_1 un argument de z^2.

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ \sin\theta_1 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

   De (1) nous déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ ou } \theta_1 = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

   et en tenant compte de (2) nécessairement

$$\theta_1 = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

3. En utilisant les propriétés du module et de l'argument d'un produit déterminer la forme trigonométrique de z.

   - $\text{Arg}(z^2) = 2\text{Arg(z)} \mod 2\pi$
     donc
     $$\begin{aligned}\text{Arg}(z) &= \frac{1}{2} \times \frac{7\pi}{6} \mod \pi \\ &= \frac{7\pi}{12} \mod \pi\end{aligned}$$
   - $|z^2| = |z|^2$ et comme $|z| \geq 0$: $|z| = \sqrt{|z^2|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   - La forme trigonométrique de z est donc
     $$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
   Par identification des parties réelles et imaginaires des expressions algébrique et trigonométrique de z
   $$\begin{cases} 1-\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ 1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$
   D'où
   $$\begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases}$$

Exercice 3. 8 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(0, I, J)$. (Unité graphique : 2 cm). Vous justifierez chacune de vos réponses.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
   $f(x) = \frac{2x^3-4x^2}{\mathrm{e}^x}$ or $\mathrm{e}^x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x.
   f est un produit d'une fonction polynomiale et de l'inverse de la fonction exponentielle toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 \times 3x^2 - 4 \times 2x)\mathrm{e}^{-x} + (2x^3 - 4x^2)(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (6x^2 - 8x)\mathrm{e}^{-x} - (2x^3 - 4x2)\mathrm{e}^{-x} \\ &= [6x^2 - 8x - (2x^3 - 4x^2)]\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2x^3 + 10x^2 - 8x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2x(-x^2 + 5x - 4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

3. Donner le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 5x - 4$.
   Recherchons les racines de g.

   $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 9$
   $\Delta > 0$ donc g admet deux zéros distincts :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Tableau de signe de g.

   Le coefficient dominant de g est $-1 < 0$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. En déduire le signe de la fonction f'.
   Tableau de signe de f'.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement .

   - Limite en $+\infty$.

     Par comparaison de fonction polynomiale et fonction exponentielle :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{e^x} = 0.$$

   - Limite en $-\infty$.

     $\lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 4x^2 = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = -\infty$
     et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$
     donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

6. Déterminer les variations de f et dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
   Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	$64e^{-4}$	$\searrow$	0

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

7. Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$.
   Calculons I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x e^{-x}\, dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -2e^1 - (-1e^0) \\ &= 1 - 2e \end{aligned}$$

   Avec l'intégration par parties.

Notons

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 uv' \\ &= [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v \\ &= \left[x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e} - \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - (-1) \\ &= 1 - 2\mathrm{e} \end{aligned}$$

On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

8. Déterminer la valeur exacte de I_2 et I_3.

   La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par récurrence. Donc

$$\begin{aligned} I_2 &= 2I_{2-1} - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 2(1 - 2\mathrm{e}^{-1}) - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 2 - \frac{5}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

   De même

$$\begin{aligned} I_3 &= 3I_{3-1} - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 3\left(2 - \frac{5}{\mathrm{e}}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 6 - \frac{16}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

9. Déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

   Puisque f est positive sur $[0; 1]$, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$$

   Calcul de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 (2x^3 - 4x^2)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x^3\mathrm{e}^{-x} - 4x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x^3\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 4x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x - 4\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \\
&= 2I_3 - 4I_2 \\
&= 2\left(6 - \frac{16}{\mathrm{e}}\right) - 4\left(2 - \frac{5}{\mathrm{e}}\right) \\
&= 4 - \frac{12}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$